

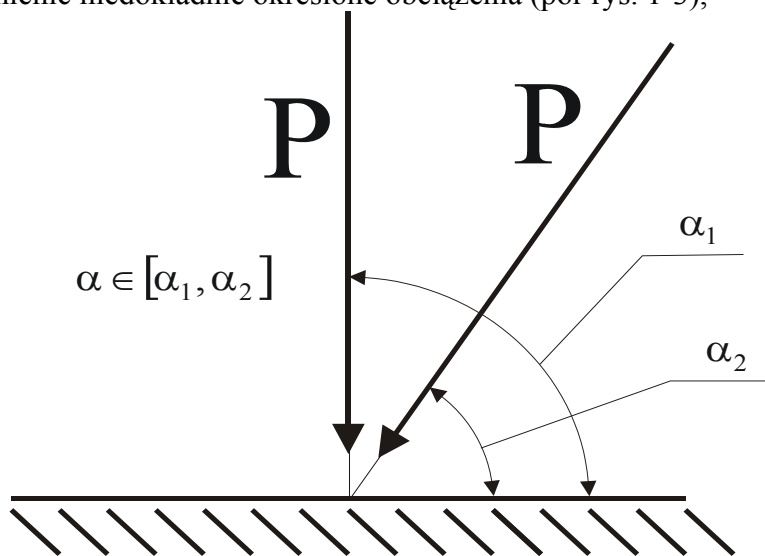
Andrzej POWNUK
Katedra Mechaniki Teoretycznej
Wydział Budownictwa
Politechnika Śląska w Gliwicach

MODELOWANIE UKŁADÓW MECHANICZNYCH Z NIEPEWNYMI PARAMETRAMI

Streszczenie. Wszystkie parametry układów mechanicznych są znane z pewną dokładnością. W przypadku gdy posiadamy precyzyjne informacje o ich wartościach, to do obliczeń należy zastosować metody deterministyczne. Istnieją sytuacje, w których znamy jedynie losowe charakterystyki parametrów układów mechanicznych. W takim przypadku należy zastosować metody probabilistyczne. Jeśli nie dysponujemy wystarczającą ilością informacji do określenia losowych charakterystyk, to do modelowania należy wykorzystać nowe metody modelowania matematycznego. W pracy zaproponowano wykorzystanie tolerancji oraz zbiorów rozmytych do opisu niepewności parametrów. Podczas obliczeń wykorzystano program ANSYS.

1 Wprowadzenie

Prawie wszystkie układy mechaniczne zawierają jakieś niepewne parametry. Przykładowo można tutaj wymienić niedokładnie określone obciążenia (por rys. 1-3),



Rys. 1

niedokładnie określone charakterystyki materiałowe (np. E , ν itp.) oraz geometryczne (por rys.4,5). Jeden z najprostszych sposobów modelowania niepewności wielkości mechanicznych oparty jest na wykorzystaniu przedziałów liczbowych (tolerancji). W większości układów mechanicznych zależność pomiędzy nieznanymi zmiennymi i niepewnymi parametrami jest monotoniczna. W takim przypadku obliczanie ekstremalnych

wartości wielkości mechanicznych jest znacznie prostsze. W takim przypadku można zastosować następującą procedurę

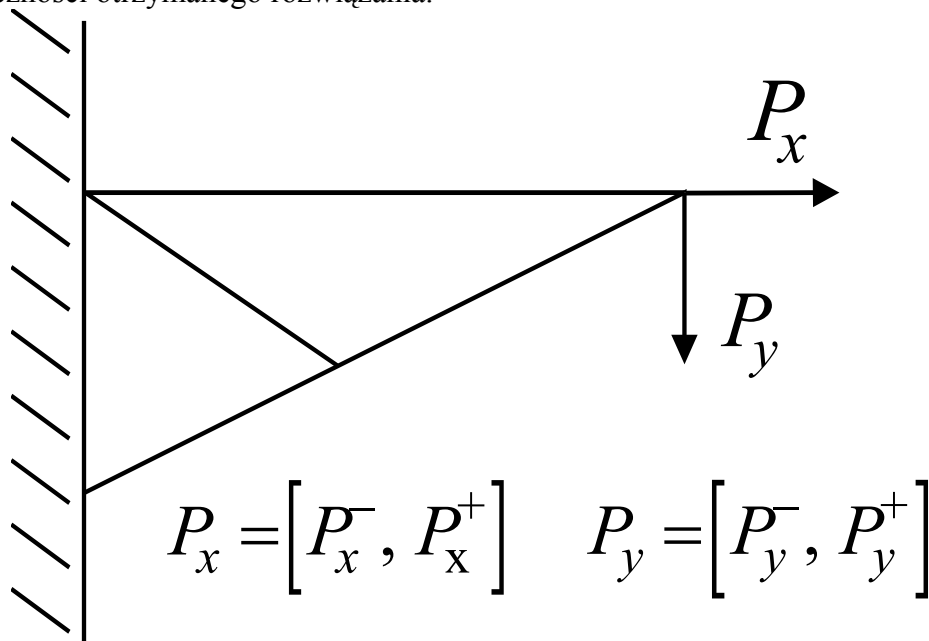
$$\text{Jeśli } \frac{\partial f}{\partial h_i} > 0, \text{ to } f^- = f(\dots, h_i^-, \dots), f^+ = f(\dots, h_i^+, \dots)$$

$$\text{Jeśli } \frac{\partial f}{\partial h_i} < 0, \text{ to } f^- = f(\dots, h_i^+, \dots), f^+ = f(\dots, h_i^-, \dots)$$

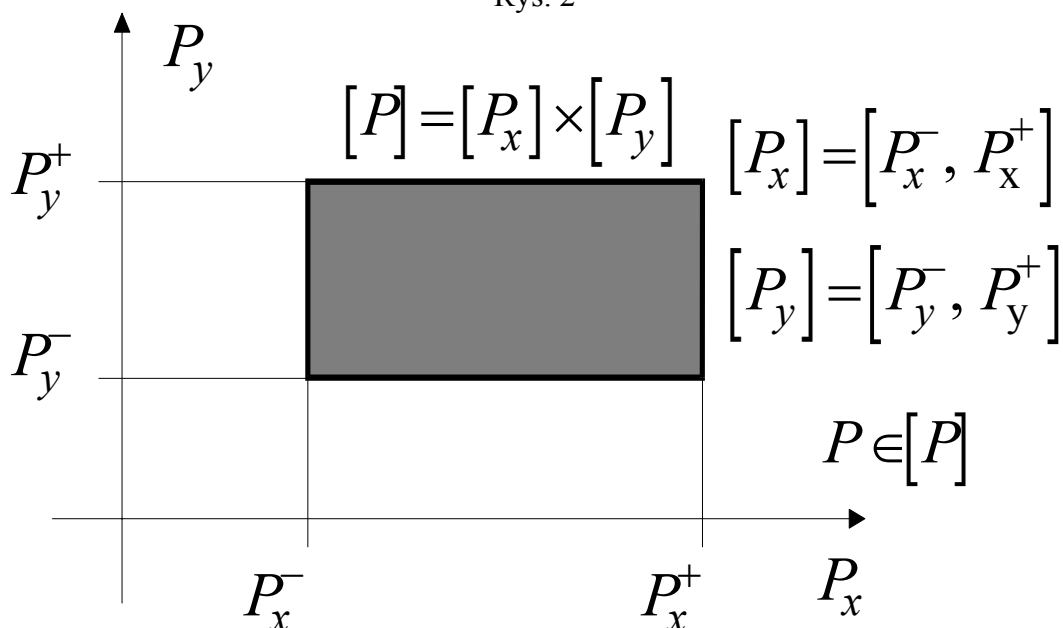
Symbolicznie procedurę tę można zapisać następująco:

$$f^- = f\left(\mathbf{h}^{-\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}\right)}\right), f^+ = f\left(\mathbf{h}^{\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}\right)}\right) \quad (1)$$

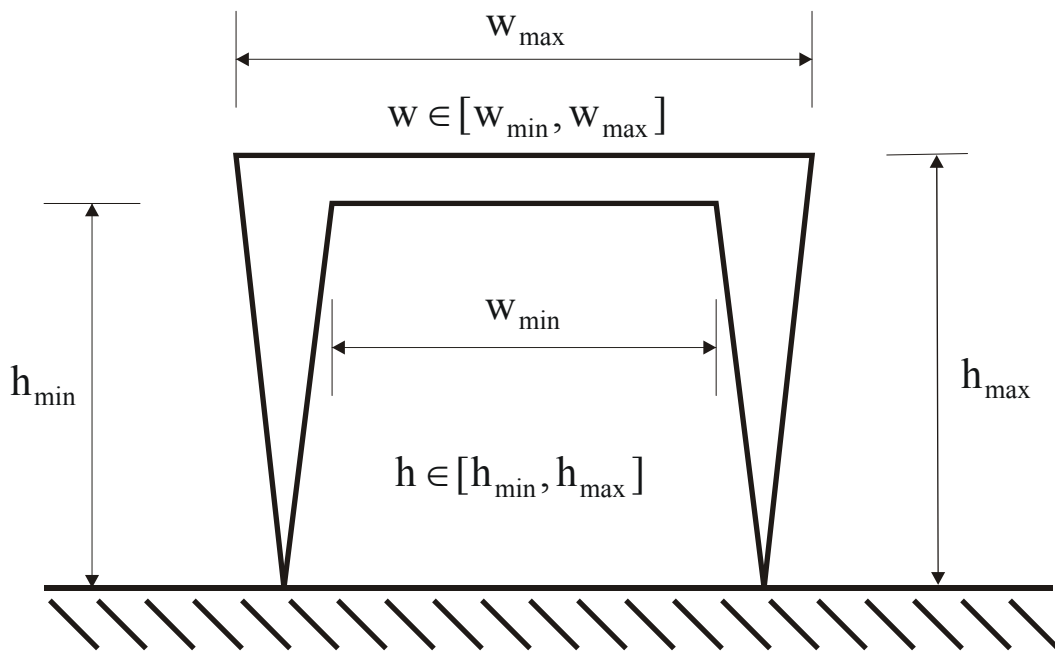
W pracy przedstawiono efektywną procedurę numeryczną, która umożliwia sprawdzenie monotoniczności otrzymanego rozwiązania.



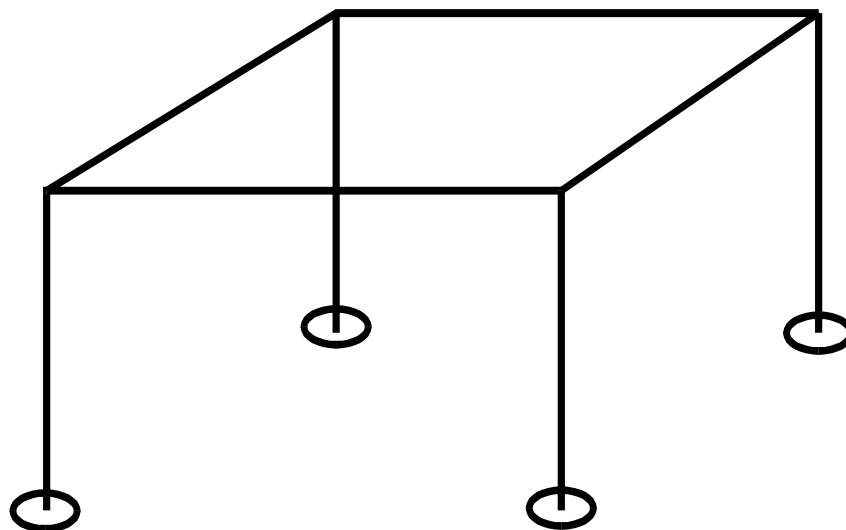
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

2 Punktowe testy monotoniczności

Jak wiadomo każdą funkcję, która jest dostatecznie gładka może zostać przybliżona przy pomocy funkcji liniowej (por. rys. 6) zgodnie ze wzorem

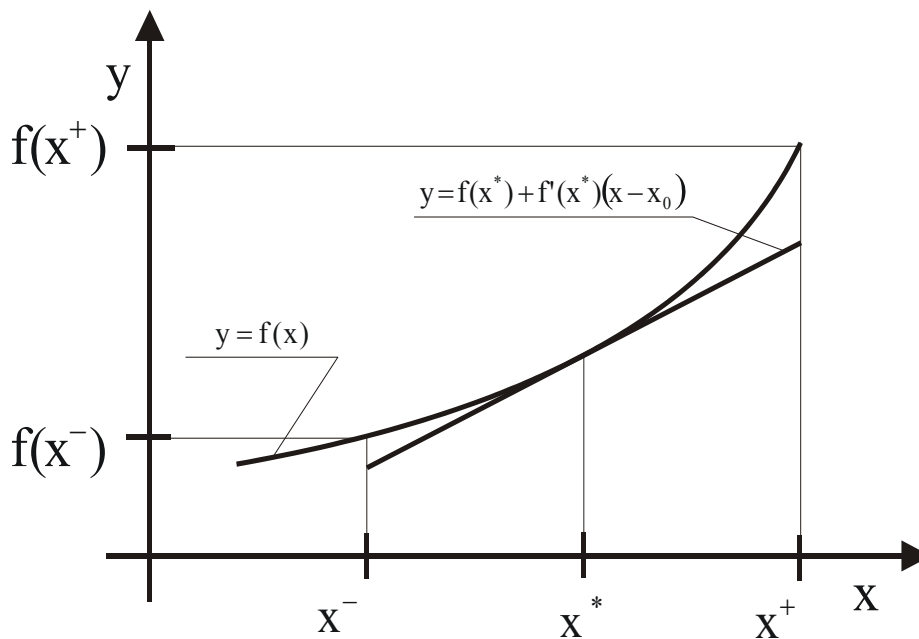
$$f(h) \approx f(h_0) + f'(h_0)(h - h_0) \quad (2)$$

Jeśli funkcja jest monotoniczna, to znak pochodnej takiej funkcji jest stały

$$\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial h_i}\right) = \text{const} \quad (3)$$

Ponieważ bezpośrednie sprawdzenie warunku (3) jest bardzo trudne, to pochodną funkcji przybliżamy przy pomocy wzoru Taylora

$$\frac{\partial f(\mathbf{h})}{\partial h_i} \approx \frac{\partial f(\mathbf{h}_0)}{\partial h_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{h}_0)}{\partial h_i \partial h_j} (h_j - h_j^0) \quad (4)$$



Rys. 6

W oparciu o równanie (4) można skonstruować szereg procedur służących do sprawdzania monotoniczności [2]. Pochodne potrzebne we wzorze (4) można obliczyć przy pomocy ilorazów różnicowych

$$\frac{\partial f}{\partial h_i} \approx \frac{f(\dots, h_i + \Delta h_i, \dots) - f(\dots, h_i, \dots)}{\Delta h_i} \quad (5)$$

Wartości funkcji $f(h_1, \dots, h_m)$ obliczamy przy pomocy programu ANSYS [1].

3 Pierwszy test monotoniczności

Najpierw definiujemy następującą funkcję liniową:

$$\frac{\partial \tilde{u}_x(h_1, \dots, h_m)}{\partial h_j} = \frac{\partial u_x(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u_x(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j \partial h_k} (h_k - h_k^0) \quad (6)$$

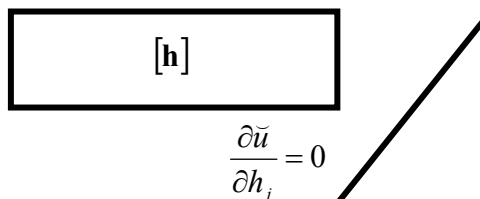
Jeśli

$$\text{sign}\left(\frac{\partial \tilde{u}_x(h_1^\pm, \dots, h_m^\pm)}{\partial h_j}\right) = \text{const} \quad (7)$$

wtedy

$$\left\{ (h_1, \dots, h_m) : \frac{\partial \tilde{u}_x(h_1, \dots, h_m)}{\partial h_j} = 0 \right\} \cap [\mathbf{h}] = \emptyset \quad (8)$$

i można przyjąć, że rozpatrywana funkcja jest monotoniczna (por rys.7).



Rys. 7

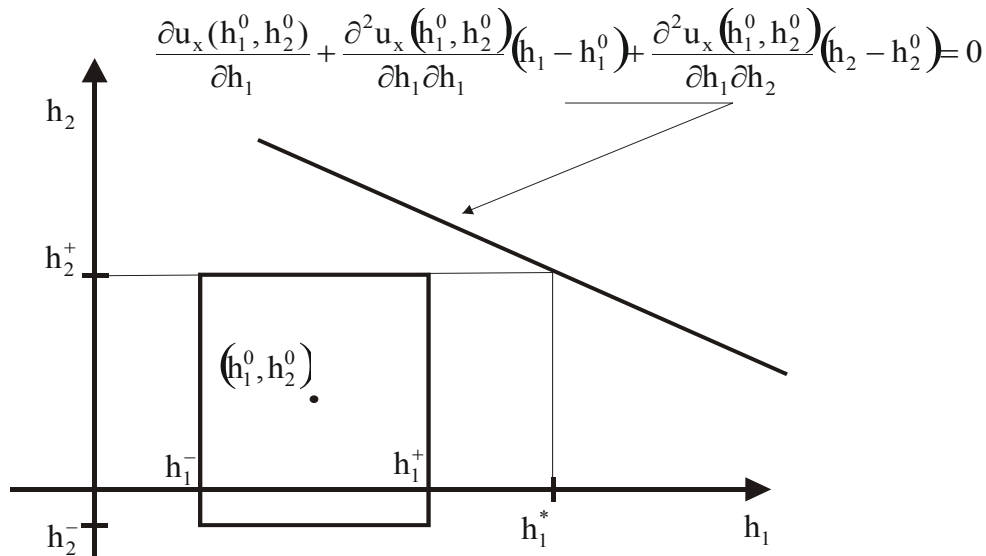
4 Drugi test monotoniczności

Niech $m=2$ i $h_2 = h_2^+$

$$\frac{\partial u_x(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1} + \frac{\partial^2 u_x(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1 \partial h_1} (h_1 - h_1^0) + \frac{\partial^2 u_x(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1 \partial h_2} (h_2^+ - h_2^0) = 0 \quad (9)$$

wtedy

$$h_1^* = h_1^0 - \frac{1}{\frac{\partial^2 u_x(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1 \partial h_1}} \left(\frac{\partial u_x(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1} + \frac{\partial^2 u_x(h_1^0, h_2^0)}{\partial h_1 \partial h_2} (h_2^+ - h_2^0) \right) \quad (10)$$



Rys. 8

W przypadku wielowymiarowym:

$$h_i^* = h_i^0 - \frac{1}{\frac{\partial^2 u_x(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j \partial h_i}} \left(\frac{\partial u_x(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{\partial^2 u_x(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j \partial h_k} (h_k^{\pm} - h_k^0) \right) \quad (11)$$

Jeśli $h_i^* \notin [h_i]$ wtedy funkcja $u_x(h_1^0, \dots, h_{j-1}^0, h_j, h_{j+1}^0, \dots, h_m^0)$ jest monotoniczna w przedziale $[h_j]$ gdzie $h_i^0 \in [h_i]$ $i=1, \dots, m$ i $i \neq j$ (por rys. 8).

5 Trzeci test monotoniczności

W metodzie tej traktujemy funkcje wielu zmiennych jak funkcje jednej zmiennej

$$\frac{\partial u_x(h_j)}{\partial h_j} := \frac{\partial}{\partial h_j} u_x(h_1^0, \dots, h_{j-1}^0, h_j, h_{j+1}^0, \dots, h_m^0) \quad (12)$$

Przyjmujemy

$$\frac{\partial u_x(h_j)}{\partial h_j} \approx \frac{\partial u_x(h_j^0)}{\partial h_j} + \frac{\partial^2 u_x(h_j^0)}{\partial h_j^2} (h_j - h_j^0) = 0 \quad (13)$$

Czyli

$$h_j = h_j^0 - \frac{\frac{\partial u_x(h_j^0)}{\partial h_j}}{\frac{\partial^2 u_x(h_j^0)}{\partial h_j^2}} \quad (14)$$

Wartości funkcji można przybliżyć przy pomocy ilorazów różnicowych:

$$\frac{\partial u_x(h_j^0)}{\partial h_j} \approx \frac{u_x(h_j^0 + \Delta h_j^0) - u_x(h_j^0)}{\Delta h_j^0} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u_x(h_j^0)}{\partial h_j^2} \approx \frac{u_x(h_j^0 + \Delta h_j^0) - 2 \cdot u_x(h_j^0) + u_x(h_j^0 - \Delta h_j^0)}{(\Delta h_j^0)^2} \quad (16)$$

Ostatecznie można napisać

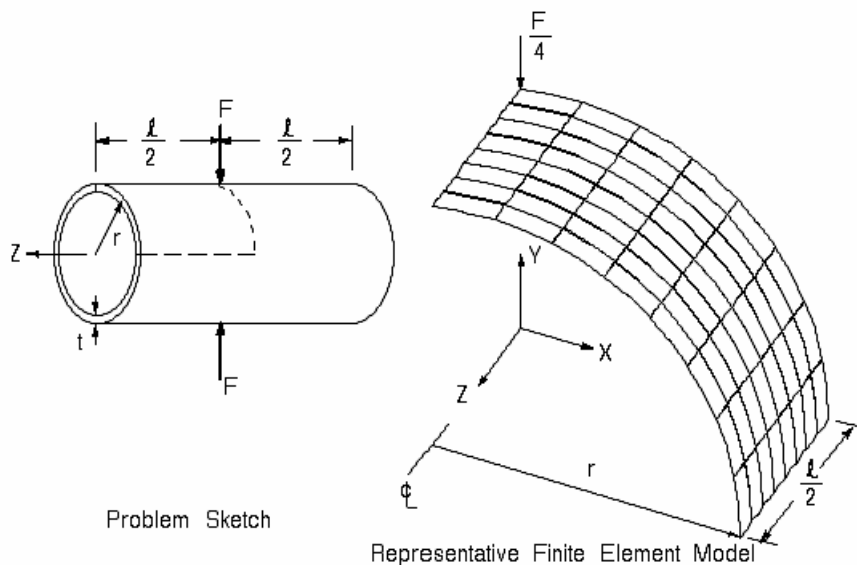
$$h_j^* \approx h_j^0 - \frac{[u_x(h_j^0 + \Delta h_j^0) - u_x(h_j^0)] \cdot \Delta h_j^0}{u_x(h_j^0 + \Delta h_j^0) - 2 \cdot u_x(h_j^0) + u_x(h_j^0 - \Delta h_j^0)} \quad (17)$$

Jeśli $h_j^* \notin [h_j^-, h_j^+]$, to można przyjąć, że analizowana funkcja jest monotoniczna.

6 Przykłady obliczeń

6.1 Przemieszczenia cienkościennego cylindra

Dane $E \in [2.0 \cdot 10^5, 2.2 \cdot 10^5] \text{ MPa}$, $\nu \in [0.2, 0.3]$ $L=0.263 \text{ m}$, $r=0.126 \text{ m}$, $t=2.38 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $F=444.8 \text{ N}$.



Rys. 9

$$\Delta u_y^{df} = u_y(h + \Delta h) - u_y(h) \quad (18)$$

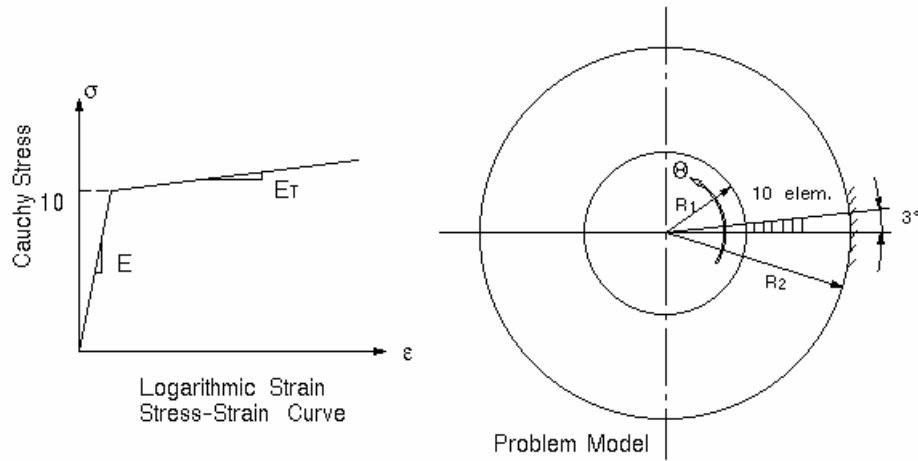
$$\Delta^2 u_y^{df} = u_y(h + \Delta h) - 2 \cdot u_y(h) + u_y(h - \Delta h) \quad (19)$$

$$\Delta h^{*df} = \frac{[u_y(h + \Delta h) - u_y(h)] \cdot \Delta h}{u_y(h + \Delta h) - 2 \cdot u_y(h) + u_y(h - \Delta h)} \quad (20)$$

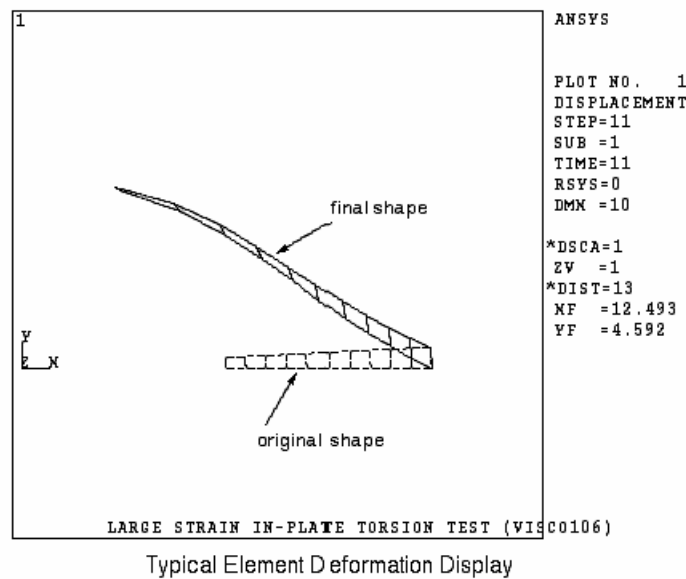
Ponieważ

6.3 Płaskie skręcanie pręta o przekroju okrągłym wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego

Dane $E \in [49.3, 49.9]$ Mpa, $E_T \in [0.28, 0.34]$ MPa, $\sigma_y = 0.6$ MPa, $\nu \in [0.32, 0.34]$, $R_1 = 0.254$ m, $R_2 = 0.508$ m, $\Theta = 60^\circ$.



Rys. 12



Rys. 13

Założymy, że

$$h_1 = E, \quad h_2 = \nu \quad (23)$$

W celu sprawdzenia monotoniczności zastosowano trzeci test.

$$\frac{\partial q_i(\mathbf{h})}{\partial h_j} \approx \frac{\partial q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j \partial h_k} (h_k - h_k^*) = 0 \quad (24)$$

Wyniki obliczeń numerycznych przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1

| | $\frac{\partial \sigma_x}{\partial h_1}$ | | | |
|---------|--|---------|----------------------|----------------------|
| | h_1^- | h_1^+ | h_2^- | h_2^+ |
| | MPa | MPa | | |
| h_1^* | x | x | $-1.6 \cdot 10^{10}$ | $-1.2 \cdot 10^{11}$ |
| h_2^* | 0.264 | 0.264 | x | x |
| | $\frac{\partial \sigma_x}{\partial h_2}$ | | | |
| | h_1^- | h_1^+ | h_2^- | h_2^+ |
| | MPa | MPa | | |
| h_1^* | x | x | 67.0 | 9.2 |
| h_2^* | 0.31 | 0.31 | x | x |

Ponieważ $h_i^* \notin [h_i^-, h_i^+]$ dla $i=1,2$, dlatego funkcje $\sigma_x = \sigma_x(h_1)$, $\sigma_x = \sigma_x(h_2)$ są monotoniczne w przedziałach $[h_1^-, h_1^+]$, $[h_2^-, h_2^+]$. Przedziałowe rozwiązanie $\sigma_x \in [0.36, 0.48]$ MPa.

7 Wnioski

Przedstawione algorytmy są efektywnymi metodami modelowania układów mechanicznych z niepewnymi parametrami. Przy ich pomocy można modelować niepewności bardzo złożonych układów mechanicznych.

Przedstawione algorytmy wykorzystują wyniki generowane przez istniejące oprogramowanie inżynierskie. Podczas obliczeń wykorzystano program ANSYS.

Literatura

- [1] ANSYS 5.4 User's Manual.
- [2] Pownuk A., Zastosowanie metod analizy wrażliwości do modelowania konstrukcji z przedziałowymi parametrami. XLVI Konferencja Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN oraz Komitetu Nauki PZiTb "Krynica'2000", Tom 1, s.145-152