

Politechnika Śląska
Wydział Budownictwa
Zakład Mechaniki Teoretycznej

Andrzej Pownuk

**Zastosowanie teorii zbiorów
rozmytych
do oceny niezawodności
konstrukcji budowlanych**

Cel pracy

Opracowanie metod obliczania niezawodności konstrukcji z niepewnymi parametrami przy wykorzystaniu **teorii zbiorów rozmytych**

Spis treści

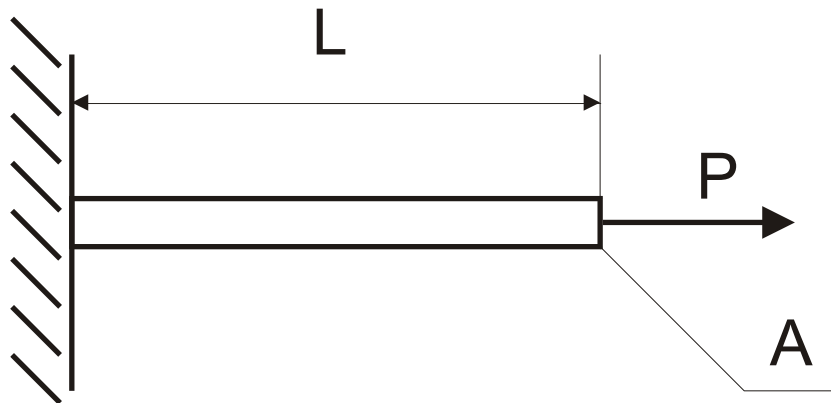
- 1.Sformułowanie problemu niezawodności konstrukcji z niepewnymi parametrami.
- 2.Różne interpretacje funkcji przynależności zbioru rozmytego.
- 3.Niezawodność konstrukcji o parametrach losowych i rozmytych.
- 4.Metody rozwiązywania równań rozmytych.
- 5.Zastosowanie algorytmu przedziałowej optymalizacji globalnej do modelowania układów z niepewnymi parametrami.
- 6.Wnioski

Niezawodność konstrukcji w ujęciu probabilistycznym

$$R = P_{\Omega}(\{\omega : g(\mathbf{X}_{\Omega}(\omega)) > 0\})$$

gdzie $\mathbf{X}_{\Omega} : \Omega \ni \omega \rightarrow \mathbf{X}_{\Omega}(\omega) \in R^n$ jest wektorem losowym oraz $(\Omega, \Sigma_{\Omega}, P_{\Omega})$ jest przestrzenią probabilistyczną.

Przykład



$$g(P) = \sigma - \frac{P}{A}$$

$$P_f = 1 - R = P_{\Omega}(\{\omega : g(\mathbf{X}_{\Omega}(\omega)) \leq 0\})$$

$$P_f = \sum_{g(\mathbf{x}) \leq 0} P(\mathbf{x} = \mathbf{X}_{\Omega})$$

Pomiary punktowe

P [kN]	[12, 15]	[15, 18]	[18, 21]	[21, 24]	[24, 27]
$P_{\Omega}(\mathbf{x} = \mathbf{X}_{\Omega})$	1/6	5/12	1/6	1/6	1/12
Znak $g(\mathbf{x})$	+	+	-	-	-

$$P_f = \sum_{g(\mathbf{x}) \leq 0} P_{\Omega}(\mathbf{x} = \mathbf{X}_{\Omega}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = 0.417$$

Pomiary przedziałowe

P [kN]	[12, 15)	[15, 18)	[18, 21)	[21, 24)	[24, 27]
$X_{\Gamma}(\gamma_5)$					
$X_{\Gamma}(\gamma_4)$					
$X_{\Gamma}(\gamma_3)$					
$X_{\Gamma}(\gamma_2)$					
$X_{\Gamma}(\gamma_1)$					
$P_{\Gamma}(\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\Gamma})$	2/5	1	2/5	2/5	1/5
Znak $g(\mathbf{x})$	+	+	-	-	-

$$P_f = \sum_{g(\mathbf{x}) \leq 0} P_{\Gamma}(\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\Gamma}) = P_{\Gamma}(\{\gamma_1\}) + P_{\Gamma}(\{\gamma_2\}) = \frac{2}{5} = 0.4$$

Górne i dolne prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji

$$P_f^+ = P_\Gamma(\{\gamma : g(\mathbf{X}_\Gamma(\gamma)) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset\})$$

$$P_f^- = P_\Gamma(\{\gamma : g(\mathbf{X}_\Gamma(\gamma)) \subseteq (-\infty, 0]\})$$

W przedstawionym przykładzie

$$P_f^- = 0, \quad P_f^+ = \frac{2}{5}$$

Funkcja przynależności zbioru rozmytego

$$\mu_F(x) = P_\Gamma(\{x : x \in X_\Gamma(\gamma)\})$$

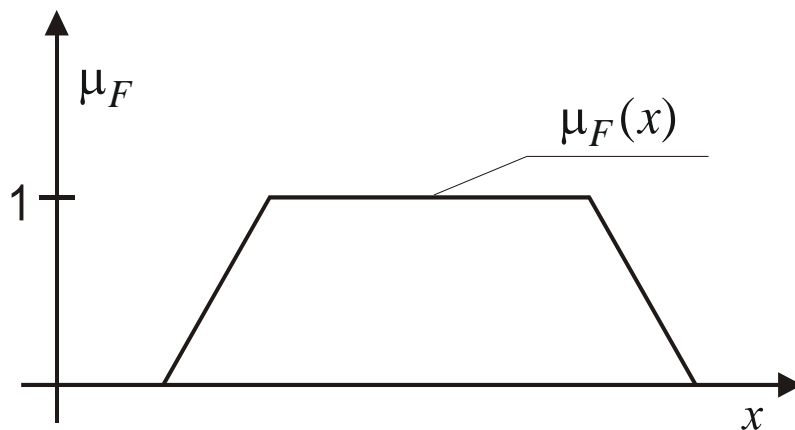
$$P_f^+ = P_\Gamma(\{\gamma : x \in X_\Gamma(\gamma), g(x) \leq 0\})$$

$$P_f^+ = \sup_{x: g(x) \leq 0} \mu_F(x)$$

PODSTAWY TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH

Zbiorem rozmytym F w przestrzeni X nazywamy dowolne odwzorowanie

$$\mu_F : X \ni x \rightarrow \mu_F(x) \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$$



Działania na zbiorach rozmytych:

$$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

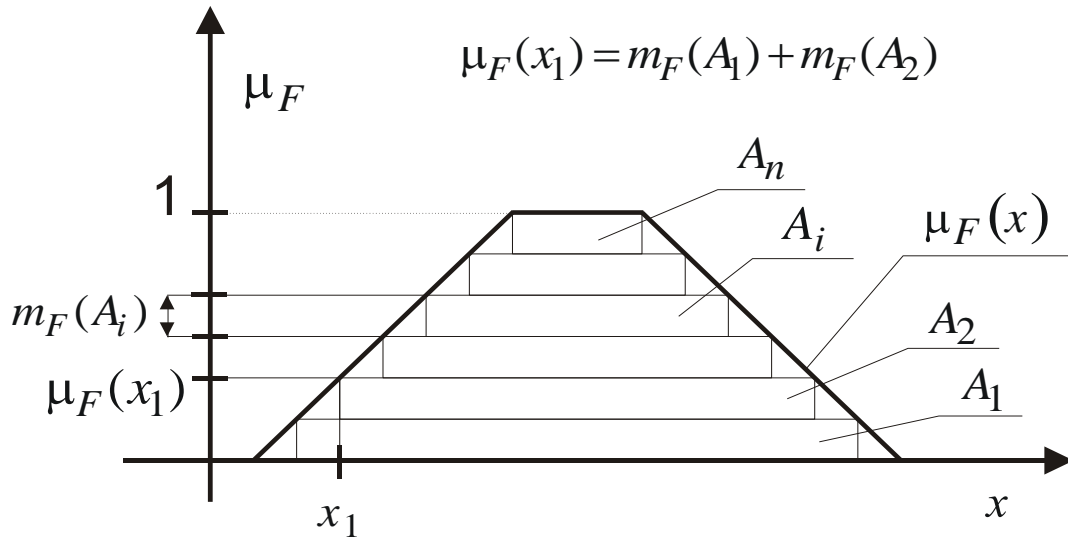
$$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\forall x \in X, \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Zasada rozszerzania:

$$\mu_{f(F)}(y) = \sup_{f(x_1, \dots, x_n) = y} \min\{\mu_{F_1}(x_1), \dots, \mu_{F_n}(x_n)\}$$

Interpretacja funkcji przynależności oparta na teorii zbiorów losowych



Zbiorem losowym w przestrzeni X (ze skończonym nośnikiem) nazywamy parę (Ξ_F, m_F) , gdzie Ξ_F jest skończoną rodziną podzbiorów przestrzeni X , a m_F jest funkcją $m_F : \Xi_F \rightarrow [0, 1]$ taką, że $\sum_{A_i: A_i \in \Xi_F} m_F(A_i) = 1$.

$$\mu_F(x) = \sum_{A: x \in A, A \in \Xi_F} m_F(A)$$

lub

$$\mu_F(x) = P_\Gamma(\{\gamma : x \in X_\Gamma(\gamma)\})$$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n$$

Probabilistyczna interpretacja funkcji przynależności zbioru rozmytego

Zbiór F jest określony na drodze doświadczalnej.

Funkcję przynależności można określić następująco:

$$\mu_F(x) = P_{\Gamma}(\{\gamma : \gamma \in F \mid X_{\Gamma}(\gamma) = x\})$$

czyli

$$\mu_F(x) = \frac{P_{\Gamma}(\{\gamma : \gamma \in F, X_{\Gamma}(\gamma) = x\})}{P_{\Gamma}(\{\gamma : X_{\Gamma}(\gamma) = x\})}$$

P [kN]	[12, 15)	[15, 18)	[18, 21)	[21, 24)	[24, 27]
Pomiar 5					
Pomiar 4					
Pomiar 3					
Pomiar 2					
Pomiar 1					
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2

- pozytywna odpowiedź eksperta

Przeprowadzono 25 pomiarów.

Zbiór F zawiera 12 pomiarów.

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa

P [kN]	[12, 15)	[15, 18)	[18, 21)	[21, 24)	[24, 27]
Pomiar 5					
Pomiar 4					
Pomiar 3					
Pomiar 2					
Pomiar 1					
$f_X(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
$P_\Gamma(x)$	1/6	5/12	1/6	1/6	1/12
Znak $g(x)$	+	+	-	-	-

$$f(x) = \frac{1}{27 - 12} = \frac{1}{15}$$

$$P_f = \sum_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) \Delta x = \frac{1}{15} \cdot 3 + \frac{1}{15} \cdot 3 + \frac{1}{15} \cdot 3 = \frac{9}{15} = 0.6$$

$$P_f^1 = \sum_{g(\mathbf{x}) \leq 0} P_\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = 0.417$$

$$P_\Gamma(\{\gamma : \gamma \in \Gamma \mid x = X_\Gamma(\gamma)\}) = 1$$

$$P_\Gamma(\{\gamma : \gamma \in F \subset \Gamma \mid x = X_\Gamma(\gamma)\}) = \mu_F(x)$$

Uwaga

Jeśli wszystkie przyrządy wykażą,
że obciążenie jest niszczące,
to układ ulega zniszczeniu.

P [kN]	[12, 15)	[15, 18)	[18, 21)	[21, 24)	[24, 27]
Przyrząd 5					
Przyrząd 4					
Przyrząd 3					
Przyrząd 2					
Przyrząd 1					
$f_X(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
$P_\Gamma(x)$	1/6	5/12	1/6	1/6	1/12
$\mu_F(x)$	2/5	1	2/5	2/5	2/5
Znak $g(x)$	+	-	-	-	-

$$P_f = \sum_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) \Delta x = 4 \frac{1}{15} 3 = 0.8$$

$$P_f^1 = \sum_{g(\mathbf{x}) \leq 0} P_\Gamma(\mathbf{x}) \Delta x = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0.833$$

$$P_f^+ = \sup_{x: g(x) \leq 0} \mu_F(x) = 1$$

**Prawdopodobieństwo zniszczenia
konstrukcji o parametrach
losowych i rozmytych**

\mathbf{x} - parametr losowy $P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\})$

\mathbf{h} - parametr rozmyty $\mu_F(\mathbf{h})$

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}: \mathbf{x}=\mathbf{X}(\omega), \omega: \omega \in \Omega} P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\}) \cdot \sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h})$$

$$\mu_{g(F)}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{h}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) < 0} \mu_F(\mathbf{h})$$

$$P_f = E_{\Omega}(\mu_{g(F)}(\mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{x}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\})$$

$$P_f = \int_{R^n} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) dP_{\Omega}(\mathbf{x})$$

**Prawdopodobieństwo zniszczenia
konstrukcji o parametrach losowych
i zbiorowych (przedziałowych)**

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}} \mu_{g(F)}(\mathbf{x}) P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\}) = \sum_{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) > 0, \mathbf{h} \in A\}} P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\})$$

$$P_f = \int_{\{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}, \mathbf{h}) > 0, \mathbf{h} \in A\}} dP_{\Omega}(\mathbf{x})$$

Funkcja graniczna zależy od wektora parametrów losowych o wartościach należących do zbioru rozmytego

$$P_f = \sum_{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < 0} P_{\Omega}(\{\mathbf{x}\}) \cdot \mu_F(\mathbf{x})$$

$$P_f = \int_{g(\mathbf{x}) < 0} \mu_F(\mathbf{x}) dP_{\Omega}(\mathbf{x})$$

P [kN]	12	15	18	21	24
Częstość względna	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1
$\mu_F(P)$	0.4	1	0.4	0.4	0.2
$g(P)$ [MPa]	55	25	-5	-35	-65

$$P_f = \sum_{g(P) < 0} P_{\Omega}(\{P\}) \cdot \mu_F(P) = 0.14$$

W klasycznej teorii zbiorów rozmytych wzór ten określa prawdopodobieństwo zdarzeń rozmytych (według Zadeha)

Niezawodność konstrukcji o parametrach modelowanych przy wykorzystaniu rozmytych zmiennych losowych

$$F : \Omega \ni \omega \rightarrow F(\omega) \in F(R^{n_F})$$

Dla ustalonego ω zbiór rozmyty
Dzielimy na α -przekroje

$$\bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega} : \Gamma \ni \gamma \rightarrow \bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega}(\gamma) \in I(R^{n_F})$$

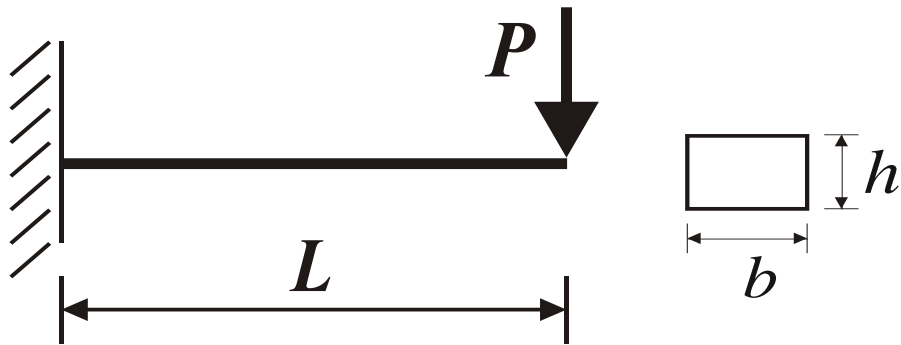
$$\mu_{F(\omega)}(\mathbf{h}) = P_{\Gamma}(\{\gamma : \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega}(\gamma)\})$$

$$P_f^+ = P_{\Omega \times \Gamma}(\{(\omega, \gamma) : g(\bar{\mathbf{h}}_{\Gamma, \omega}(\gamma)) \cap (-\infty, 0] \neq \emptyset\})$$

$$P_f^+ = \sum_{\omega_0 : \omega_0 \in \Omega} \sup_{g : g \in (-\infty, 0]} \mu_{g_{F(\omega_0)}}(g) \cdot P_{\Omega}(\{\omega_0\})$$

$$P_f^+ = E_{\Omega} \left(\sup_{g : g \in (-\infty, 0]} \mu_{g_{F(\omega)}}(g) \right)$$

Przykład zastosowania



$$g(\mathbf{h}) = \sigma_0 - \frac{|M_{\max}|}{W_z} = \sigma_0 - \frac{6 \cdot P \cdot L}{bh^2}$$

Nr	σ_0 [MPa]	P [kN]
1	[190, 205]	[2, 6]
2	[191, 204]	[2.5, 3]
3	[193, 206]	[3, 4]
4	[192, 205]	[3, 7]
5	[185, 200]	[2, 5]
6	[192, 205]	[3, 5]
7	[190, 202]	[2, 6]
8	[191, 210]	[2, 5]
9	[188, 206]	[1, 7]
10	[190, 207]	[3.5, 6]

$$(\Xi_{\sigma' \times P'}, m_{\sigma' \times P'}) \subseteq (\Xi_{\sigma \times P}, m_{\sigma \times P})$$

$$(\Xi_{\sigma' \times P'}, m_{\sigma' \times P'}) \subseteq (\Xi_{\sigma \times P}, m_{\sigma \times P})$$

α - przekroje siły i naprężenia
dopuszczalnego

α	\tilde{P}_α [kN]	$\tilde{\sigma}_{0\alpha}$ [Mpa]
1	[3.5, 4]	[193, 200]
0	[1, 7]	[188, 210]

α - przekroje funkcji granicznej

α	g_α [MPa]
1.0	[81.9, 102.8]
0.8	[64.2, 118.7]
0.6	[46.6, 134.6]
0.4	[28.9, 150.4]
0.2	[11.2, 166.3]
0.0	[-6.4, 182.2]

$$P_f^+ = Pl([- \infty, 0]) = \sup_{x \in [- \infty, 0]} \mu_g(x) \approx 0.2$$

$$P_f'^+ \leq P_f^+$$

Równania z rozmytymi parametrami

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{h}}) = \mathbf{0}$$

Wykorzystanie zasady rozszerzania

$$\mu_{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) = \sup_{\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}} \mu_{\tilde{\mathbf{h}}}(\mathbf{h})$$

Metoda α -przekrojów

$$\tilde{\mathbf{h}}_{i\alpha} = \{h_i : \mu(h_i) \geq \alpha\}$$

$$\mathbf{q}_\alpha = \{\mathbf{q} : \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \mathbf{h} \in \tilde{\mathbf{h}}_\alpha\}$$

$$\mu_{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) = \sup\{\alpha : \mathbf{q} \in \tilde{\mathbf{q}}_\alpha\}$$

Nierówności z rozmytymi parametrami

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{h}}) \geq \mathbf{0}$$

Wykorzystanie zasady rozszerzania

$$\mu_{\tilde{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}) = \sup_{\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) \geq \mathbf{0}} \mu_{\tilde{\mathbf{h}}}(\mathbf{h})$$

Metody rozwiązywania układów równań przedziałowymi parametrami

- Równania liniowe
 - metody dokładne
 - metoda kombinatoryczna
 - metoda programowania liniowego
 - metoda Rohn'a
 - metody przybliżone
 - przedziałowa metoda eliminacji Gaussa
 - przedziałowa metoda Gaussa-Seidla
 - przedziałowa metoda Krawczyka
 - metoda Hansena
 - metoda Rump'a
- metody nieliniowe
 - przedziałowa metoda Newtona
 - metoda podziału
 - metoda Neumaiera
 - metoda Gay'a
 - metoda punktowych testów monotoniczności
 - metoda przedziałowych macierzy Jakobiego
 - przedziałowa metoda CSP

Kulpa Z., Pownuk A., Skalna I., Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 5, 1998, pp.443-477

Definicje zbiorów rozwiązań układów równań z przedziałowymi parametrami

$$\Sigma_{\exists\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \exists \mathbf{A} \in \bar{\mathbf{A}}, \exists \mathbf{B} \in \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\}$$

$$\Sigma_{\exists\forall}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \exists \mathbf{A} \in \bar{\mathbf{A}}, \forall \mathbf{B} \in \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\}$$

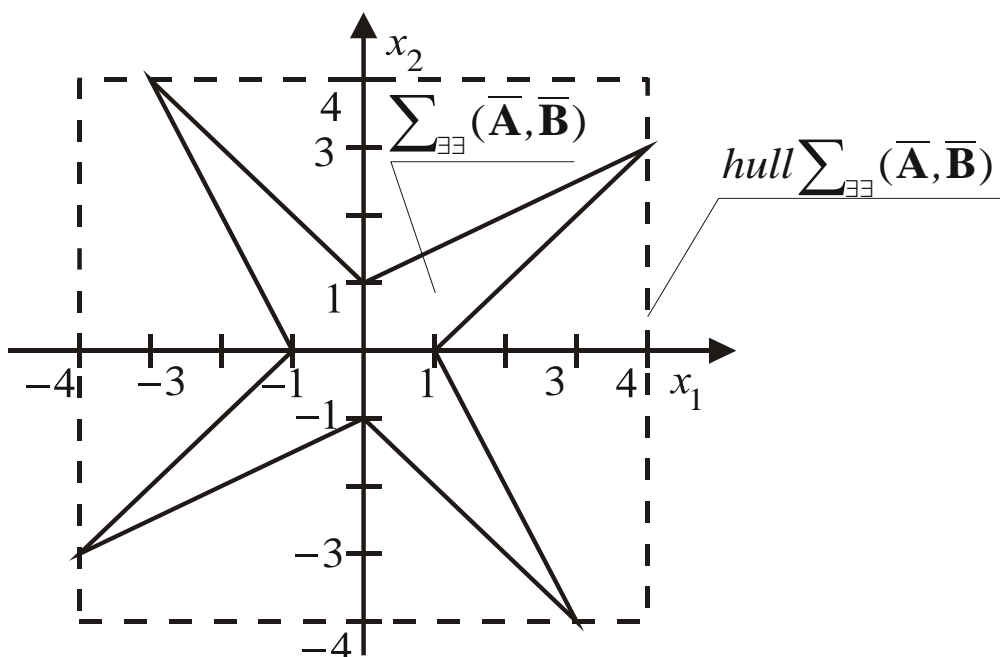
$$\Sigma_{\forall\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \forall \mathbf{A} \in \bar{\mathbf{A}}, \exists \mathbf{B} \in \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}\}$$

$$\Sigma_{\exists\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} \cap \bar{\mathbf{B}} \neq \emptyset\}$$

$$\Sigma_{\exists\forall}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} \supset \bar{\mathbf{B}}\}$$

$$\Sigma_{\forall\exists}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \{\mathbf{X} : \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} \subset \bar{\mathbf{B}}\}$$

$$\begin{bmatrix} [1,2] & [2,4] \\ [2,4] & [1,2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1,1] \\ [1,2] \end{bmatrix}$$



Podstawy arytmetyki przedziałowej

$$\bar{x} = [x^-, x^+] = \{x \in R : x^- \leq x \leq x^+\}$$

Działania na przedziałach

$$\bar{x} \circ \bar{y} = \{x \circ y : x \in \bar{x}, y \in \bar{y}\}$$

np.

$$\bar{x} + \bar{y} = [x^- + y^-, x^+ + y^+]$$

Przedziałowe rozszerzenie funkcji

$$\text{Niech } f(x) = x^2 - x$$

$$\hat{f}(x) = \bar{x} \cdot \bar{x} - \bar{x}$$

$$f(\bar{x}) = \{f(x) : x \in \bar{x}\}$$

$$\hat{f}([-1, 2]) = [-1, 2] \cdot [-1, 2] - [-1, 2] = [-4, 5]$$

$$f([-1, 2]) = \{f(x) : x \in [-1, 2]\} = [-\frac{1}{4}, 2]$$

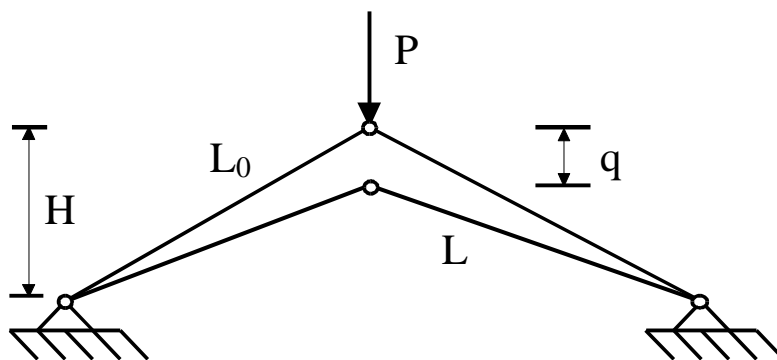
Fundamentalna własność
arytmetyki przedziałowej

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \subseteq \hat{f}(\bar{\mathbf{x}})$$

Przedziałowa metoda Newtona

$$N(x, \bar{x}) = x - \frac{f(x)}{\hat{f}'(\bar{x})}$$

- 1) Niech $x^* \in \bar{x}_0$
- 2) $x_n = \text{mid}(\bar{x}_n)$
- 3) $N(x_n, \bar{x}_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{\hat{f}'(\bar{x}_n)}$
- 4) $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n \cap N(x_n, \bar{x}_n)$
- 5) Jeśli kryteria zbieżności są spełnione, to stop. W przeciwnym przypadku skok do punktu 2.



Eps [m]		q_1 [m]	q_2 [m]	q_3 [m]
0.01	q^-	0.05046	0.313327	0.834962
	q^+	0.05047	0.313897	0.836264

Przedziałowa metoda podziału

$$\text{Jeśli } \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

oraz $\mathbf{x}^* \in \bar{\mathbf{D}}$, to

$$0 \in \hat{g}_i(\bar{\mathbf{D}}) \quad \text{dla } i=1, \dots, n$$

Przykład

$$g(x) = (x - 1)(x + 1)$$

$$\bar{D} = [0, 2]$$

$$0 \in \hat{g}([0, 2]) = [-3, 3]$$

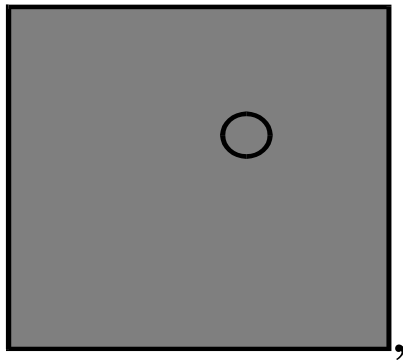
$$x^* \in \bar{D}$$

$$\text{Jeśli } \bar{D}_1 = [2, 4]$$

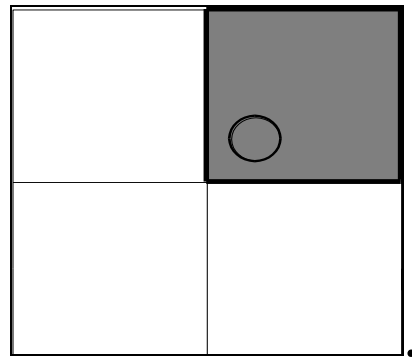
$$0 \notin \hat{g}([2, 4]) = [3, 15]$$

$$x^* \notin \bar{D}_1$$

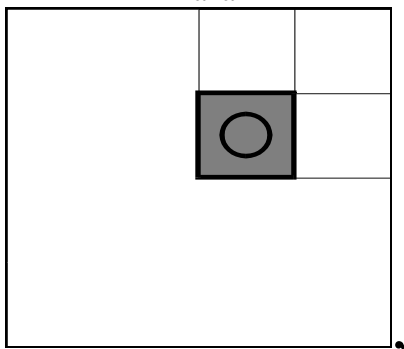
Algorytm przedziałowej metody podziału



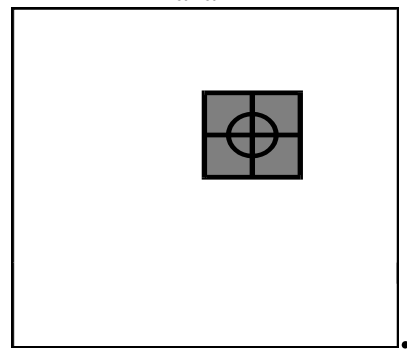
Faza 1



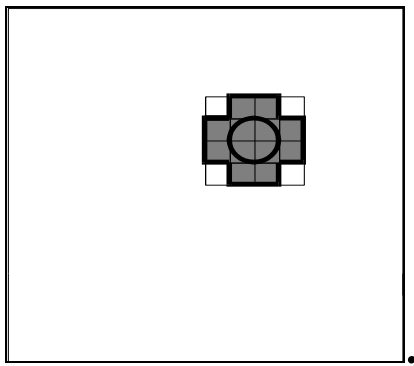
Faza 2



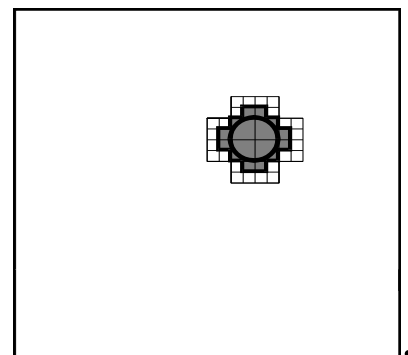
Faza 3



Faza 4

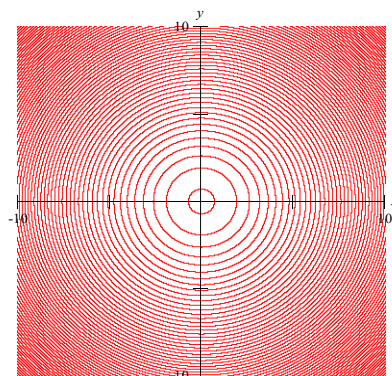


Faza 5



Faza 6

$$\sin\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$



Przedziałowy algorytm rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych ze zbiorowymi współczynnikami

$$f_1(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_m) = 0$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_m) = 0$$

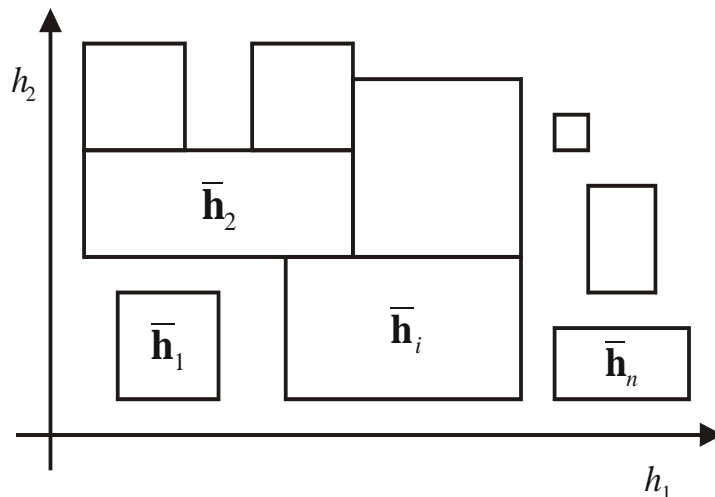
...

$$f_n(x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_m) = 0$$

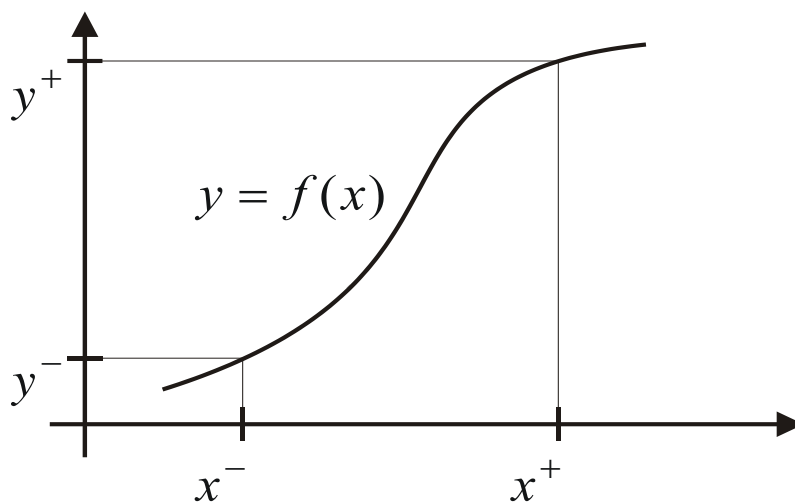
Niech $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \bar{\mathbf{h}}^*) = \mathbf{0}$

Jeśli $\mathbf{x}^* \in \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{h}^* \in \bar{\mathbf{h}}$, to
 $0 \in \hat{f}_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{h}})$ dla $i=1, \dots, n$

Jeśli $\exists i \in \{1, \dots, n\}, 0 \notin \hat{f}_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{h}})$, to
 $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{h}) \in \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \neq \mathbf{0}$



Wykorzystanie własności funkcji monotonicznych



Jeśli $\frac{df}{dx} > 0$, to

$$y^- = f(x^-), \quad y^+ = f(x^+).$$

Jeśli $\frac{df}{dx} < 0$, to

$$y^- = f(x^+), \quad y^+ = f(x^-).$$

lub w skrócie

$$y^- = f\left(x^{-\operatorname{sign}\left(\frac{df}{dx}\right)}\right), \quad y^+ = f\left(x^{\operatorname{sign}\left(\frac{df}{dx}\right)}\right)$$

$$\text{Jeśli } 0 \notin \frac{\partial \hat{f}([x])}{\partial x},$$

to funkcja jest monotoniczna

Przedziałowy test monotoniczności

$$\mathbf{K}(\lambda)\mathbf{T} = \mathbf{Q}(\lambda)$$

$$\hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda})\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} - \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} \hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda})$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda}) = \mathit{hull} \sum (\hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda}), \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda}))$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial \hat{T}_1(\bar{\lambda})}{\partial \lambda}, \dots, \frac{\partial \hat{T}_n(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} \right]^T$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} = \sum_{\exists \exists} \left(\hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda}), \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} - \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} \hat{\mathbf{T}}(\bar{\lambda}) \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 < r < R_2 : \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r\lambda \frac{dT(r)}{dr} \right) + Q = 0 \\ r = R_1 : -\lambda \frac{dT(r)}{dr} = \alpha(T(r) - T_b) \\ r = R_2 : T(r) = T_t \end{array} \right.$$

Jasiński M., Pownuk A., Modelling of heat transfer in biological tissue by interval FEM, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 7, No. 4, 2000, pp.551-558

Zastosowanie regularnych przedziałowych macierzy Jacobiego do modelowania układów mechanicznych z przedziałowymi parametrami

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)}{\partial (q_1, \dots, q_n)}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h_j, q_{i+1}, \dots, q_n)}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{h})$$

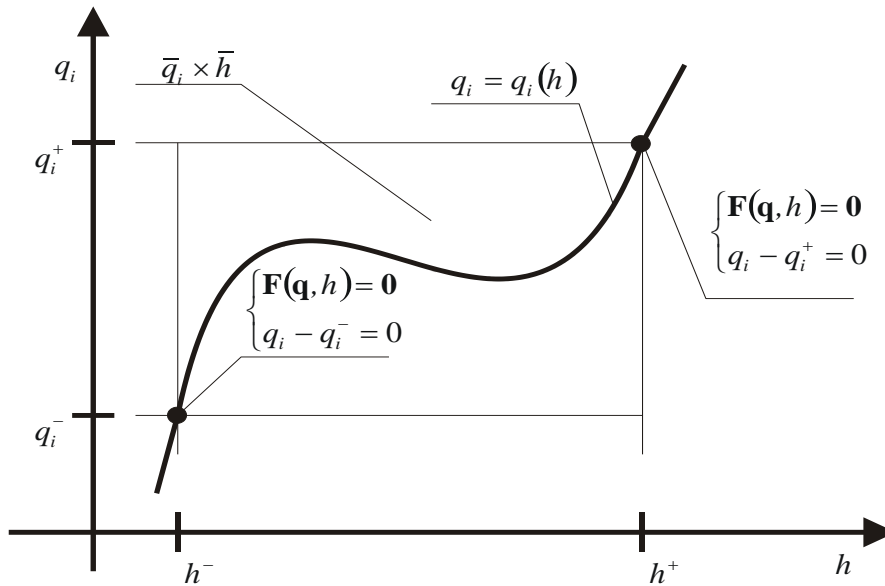
$$\frac{\partial q_i(\mathbf{h})}{\partial h_j} = - \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h})}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h_j, q_{i+1}, \dots, q_n)} \right|}{\left| \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h})}{\partial \mathbf{q}} \right|}$$

$$\mathbf{q}^{-}(\bar{\mathbf{h}}) = \mathbf{q} \left(\mathbf{h} \begin{matrix} -\text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}}\right) \\ \end{matrix} \right),$$

$$\mathbf{q}^{+}(\bar{\mathbf{h}}) = \mathbf{q} \left(\mathbf{h} \begin{matrix} \text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}}\right) \\ \end{matrix} \right)$$

Przypadek jednowymiarowy

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, h) = \mathbf{0}$$



$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{h})}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, q_i^-, \dots, \bar{q}_n, \bar{h})}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h, q_{i+1}, \dots, q_n)}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}(\bar{q}_1, \dots, q_i^+, \dots, \bar{q}_n, \bar{h})}{\partial (q_1, \dots, q_{i-1}, h, q_{i+1}, \dots, q_n)}$$

Przypadki szczególne

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{h})$$

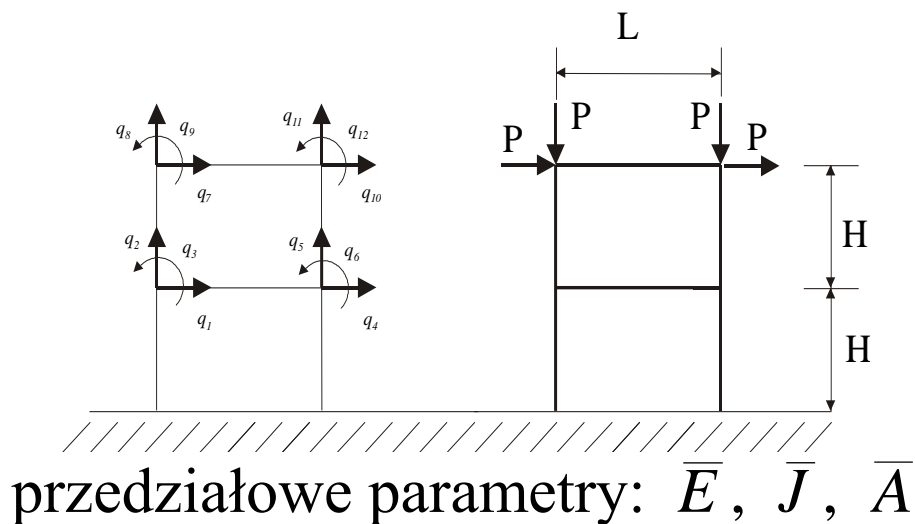
$$\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{h})$$

$$\mathbf{K}, \left[\mathbf{K}^i \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \right]$$

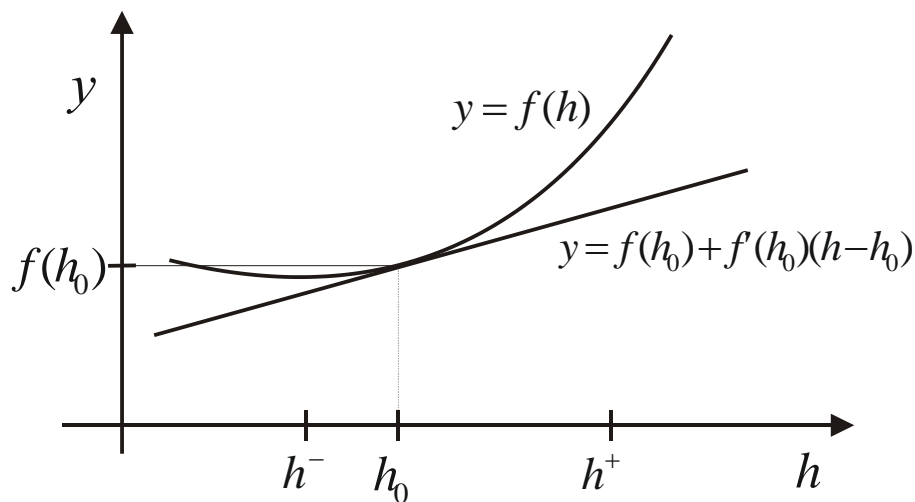
$$\hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{h}}), \left[\hat{\mathbf{K}}^i(\bar{\mathbf{h}}) \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \right]$$

$$\hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{h}}), \left[\hat{\mathbf{K}}^i(\bar{\mathbf{h}}) \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \hat{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{h}}) - \frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}(\bar{\mathbf{h}})}{\partial h_j} \right]$$



Zastosowanie analizy wrażliwości do modelowania niepewności w układach mechanicznych

$$q_j^- = q_j \left(\mathbf{h}^{-\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}\right)} \right), \quad q_j^+ = q_j \left(\mathbf{h}^{\text{sign}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}\right)} \right)$$



Przybliżenie liniowe

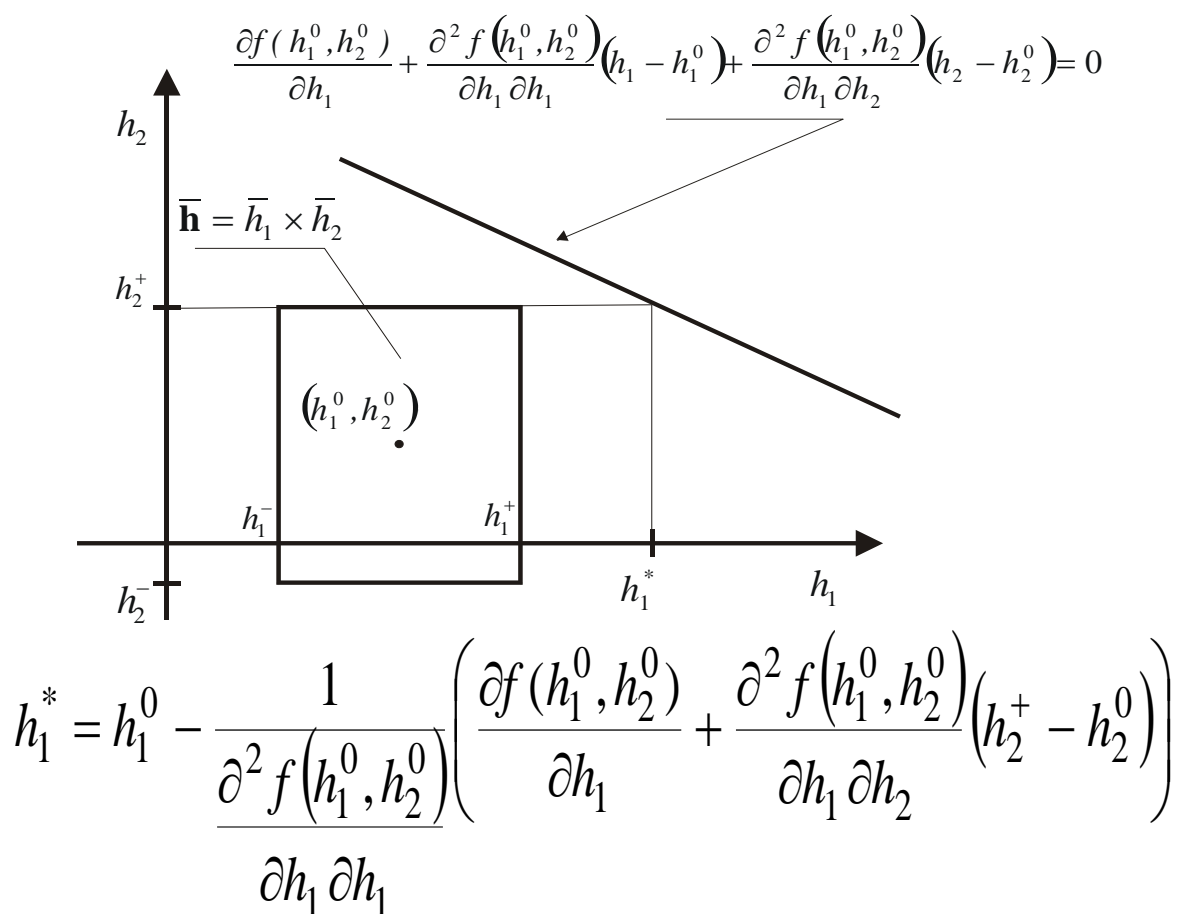
$$\frac{\partial \check{f}(h_1, \dots, h_m)}{\partial h_j} \stackrel{df}{=} \frac{\partial \check{f}(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \check{f}(h_1^0, \dots, h_m^0)}{\partial h_j \partial h_k} (h_k - h_k^0)$$

Pierwszy test monotoniczności

$$\text{sign}\left(\frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{h}_1^w)}{\partial h_j}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{h}_2^w)}{\partial h_j}\right) = \dots = \text{sign}\left(\frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{h}_{2^m}^w)}{\partial h_j}\right)$$

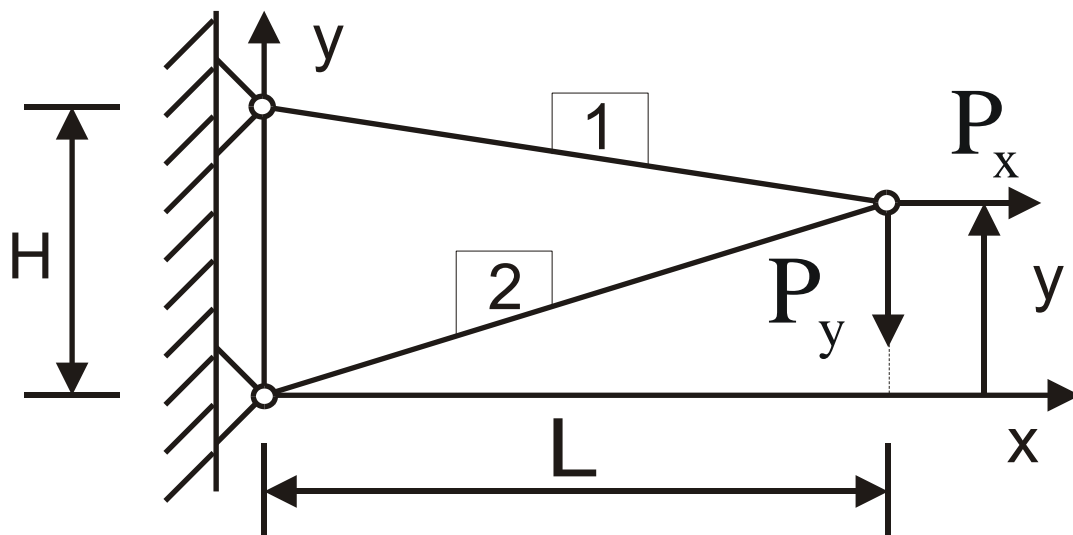
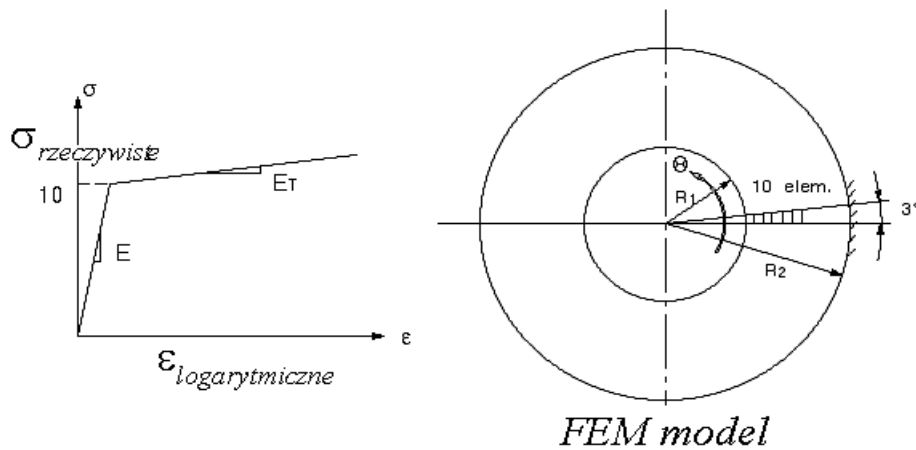
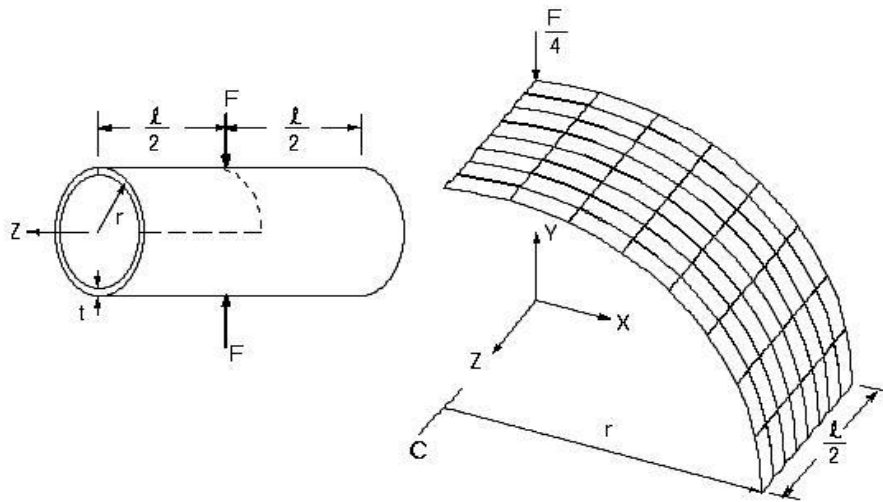
$$\left\{ (h_1, \dots, h_m) : \frac{\partial \tilde{f}(h_1, \dots, h_m)}{\partial h_j} = 0 \right\} \cap \bar{\mathbf{h}} = \emptyset$$

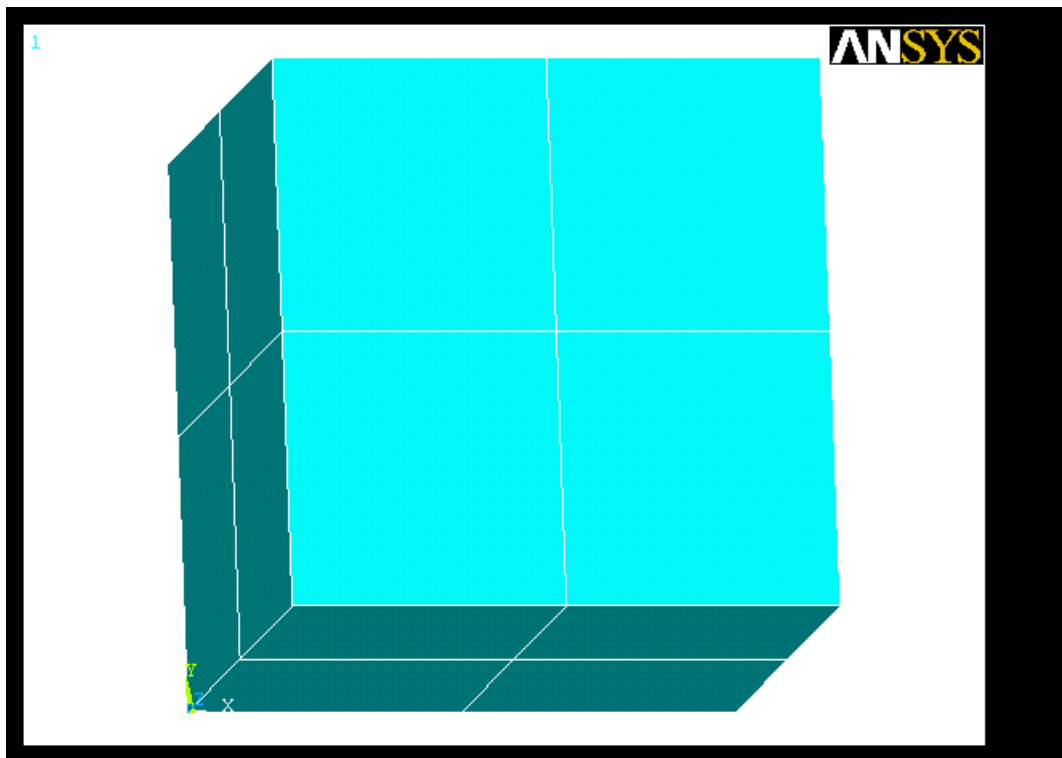
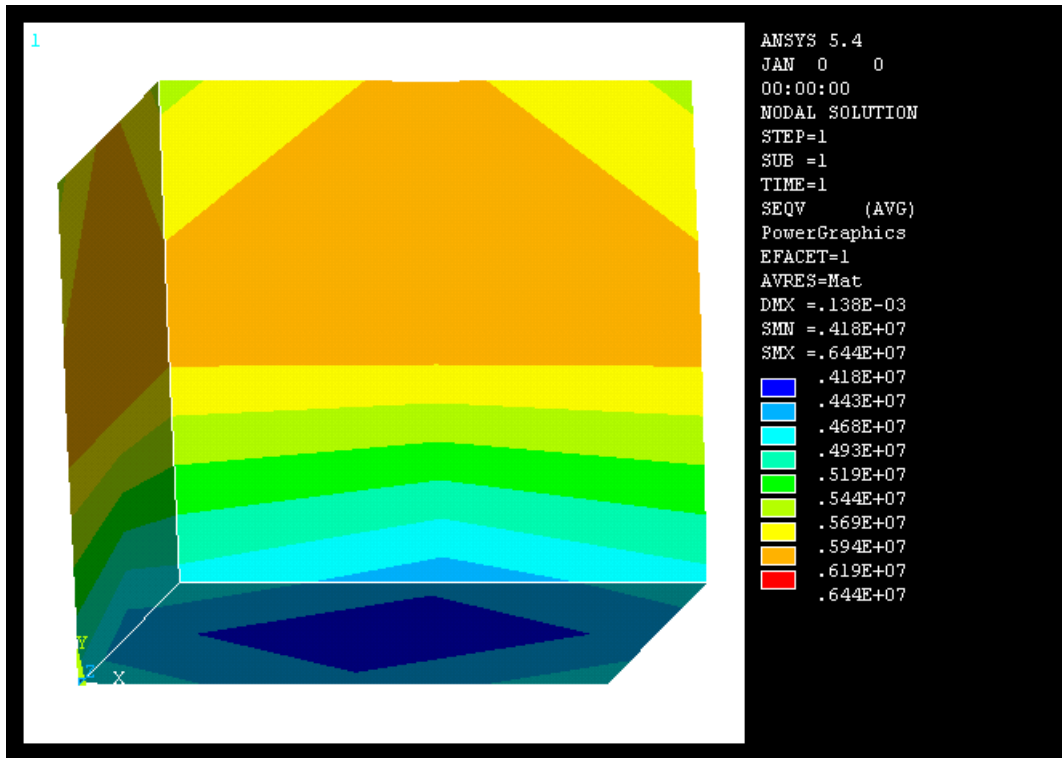
Drugi test monotoniczności



Funkcja jest monotoniczna gdy $h_i^* \notin \bar{h}_i$

Przykłady obliczeń





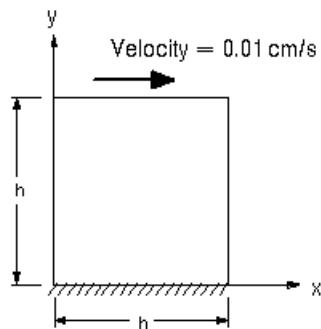
Material Properties

E_x (Young's Modulus) = 60.6E6 N/m²
 ν (Poisson's Ratio) = 0.4999
 S_o = 29.7 MPa
 Q/R = 21.08999E3 J.K/m.N
 A = 1.91E7 s⁻¹
 ξ = 7.0
 m = 0.23348
 h_o = 1115.6 MPa
 \hat{s} = 18.92 MPa
 η = 0.07049
 a = 1.3

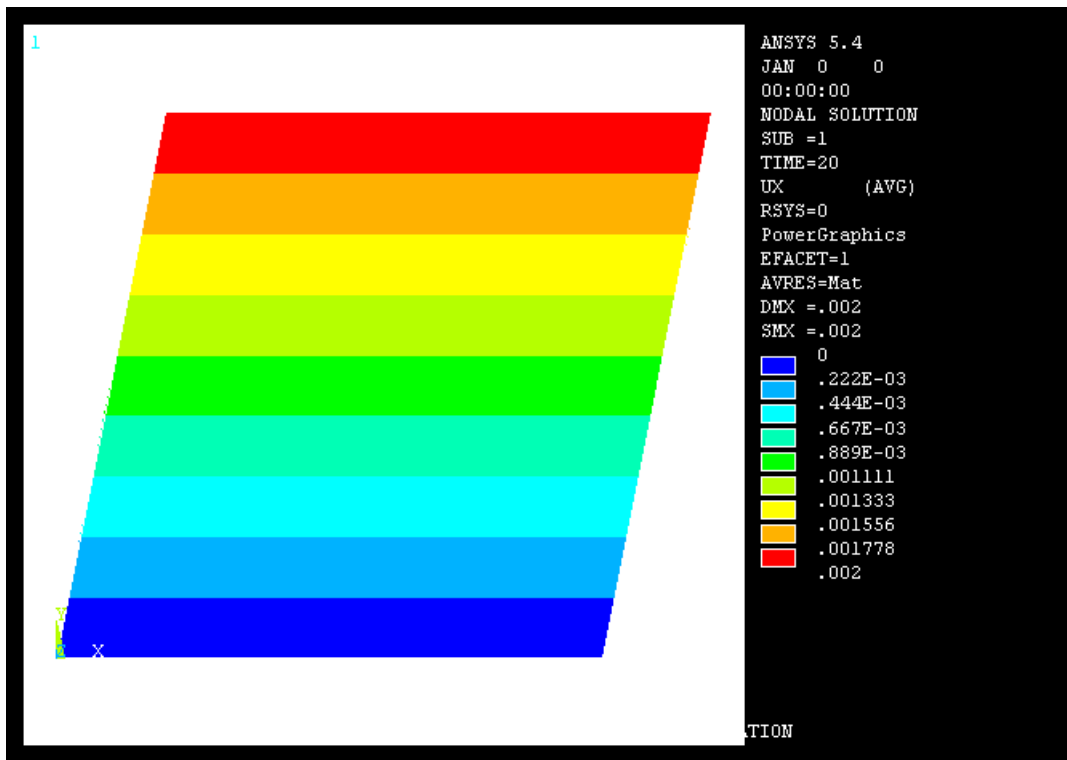
* Please refer to section 2.5.1 of User's Manual, Volume IV, Theory, for parameter details.

Geometric Properties

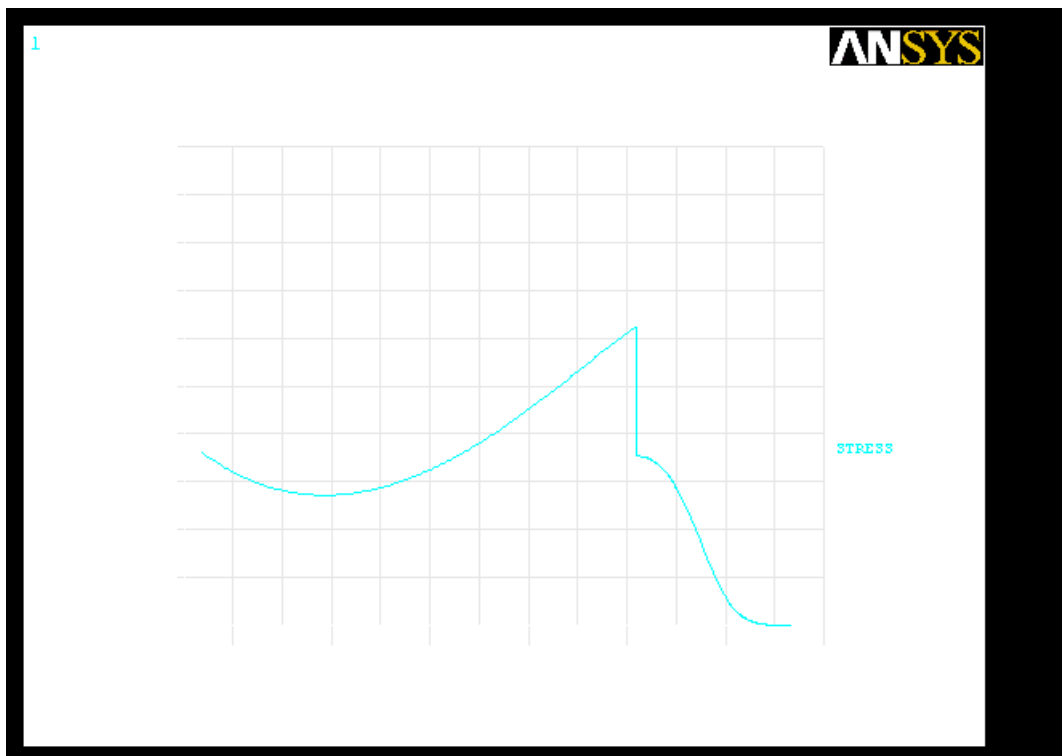
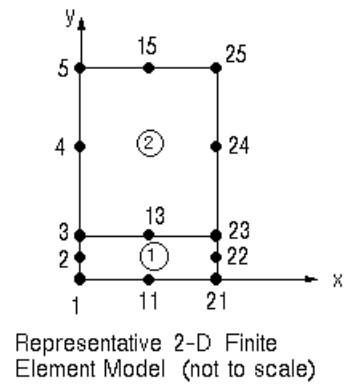
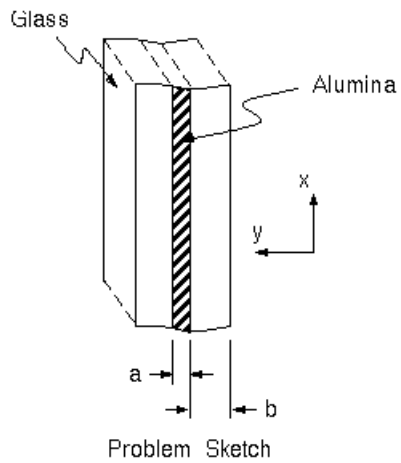
h = 1 cm
thickness = 1 cm
Loading
Temp = 400°C = 673°K
Velocity (x-direction) =
0.01 cm/sec @ $y = 1$ cm
Time = 20 sec.



Problem Model



VM200: Viscoelastic Sandwich Seal Analysis (continued)



Rozwiązanie fundamentalne (Funkcja Green'a, BEM)

Jeśli $Lu = f$ oraz $Le = \delta$, to

$$u = f * e$$

$$\frac{\partial u}{\partial h_i} = \frac{\partial}{\partial h_i} (f * e)$$

Kołowa płyta zamocowana na brzegu.

$$\Delta^2 u = 0$$

$$u(r, \varphi) \Big|_{r=R} = f(\varphi, \mathbf{h}) \quad (\text{ugięcie na brzegu})$$

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial n} \Big|_{r=R} = g(\varphi, \mathbf{h}) \quad (\text{kąt obrotu na brzegu})$$

$$u(r, \varphi, \mathbf{h}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{[R + r - \cos(\psi - \varphi)] f(\psi, \mathbf{h})}{[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)]^2} d\psi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-g(\psi, \mathbf{h})}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} d\psi \right\}$$

$$\frac{\partial u(r, \varphi, \mathbf{h})}{\partial h_i} = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{[R + r - \cos(\psi - \varphi)] \frac{\partial f(\psi, \mathbf{h})}{\partial h_i}}{[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)]^2} d\psi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-\frac{\partial g(\psi, \mathbf{h})}{\partial h_i}}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} d\psi \right\}$$

$$u^-(r, \varphi, \mathbf{h}) = u^-(r, \varphi, \mathbf{h}^{-\text{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{h}}\right)}),$$

$$u^+(r, \varphi, \mathbf{h}) = u^+(r, \varphi, \mathbf{h}^{\text{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{h}}\right)})$$

Metody całkowania równań różniczkowych z przedziałowymi parametrami

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h}) \quad \text{gdzie } \mathbf{q}(0, \mathbf{h}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}$$

$$\mathbf{q}^-(t) = \min_{\mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}} \mathbf{q}(t, \mathbf{h}), \quad \mathbf{q}^+(t) = \max_{\mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}}} \mathbf{q}(t, \mathbf{h})$$

$$\mathbf{q}^-(t) = \mathbf{q} \left(t, \mathbf{h}^{-\text{sign} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}} \right)} \right),$$

$$\mathbf{q}^+(t) = \mathbf{q} \left(t, \mathbf{h}^{\text{sign} \left(\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial \mathbf{h}} \right)} \right)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h})$$

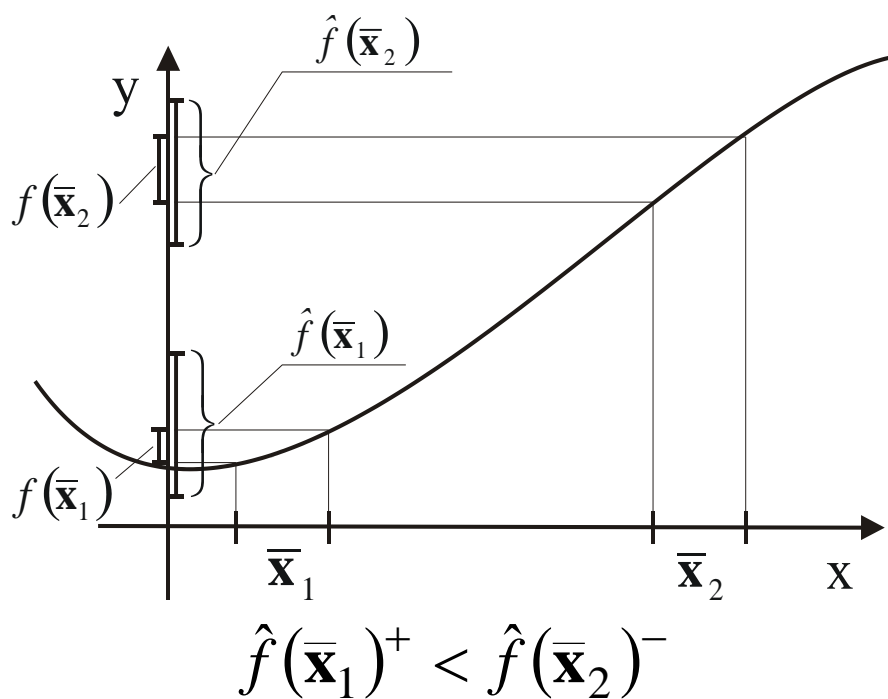
$$\mathbf{0} = \Phi(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$$

$$\text{gdzie } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{h}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{h}}$$

Warunki brzegowe dla funkcji v
otrzymujemy różniczkując warunki brzegowe
dla funkcji q .

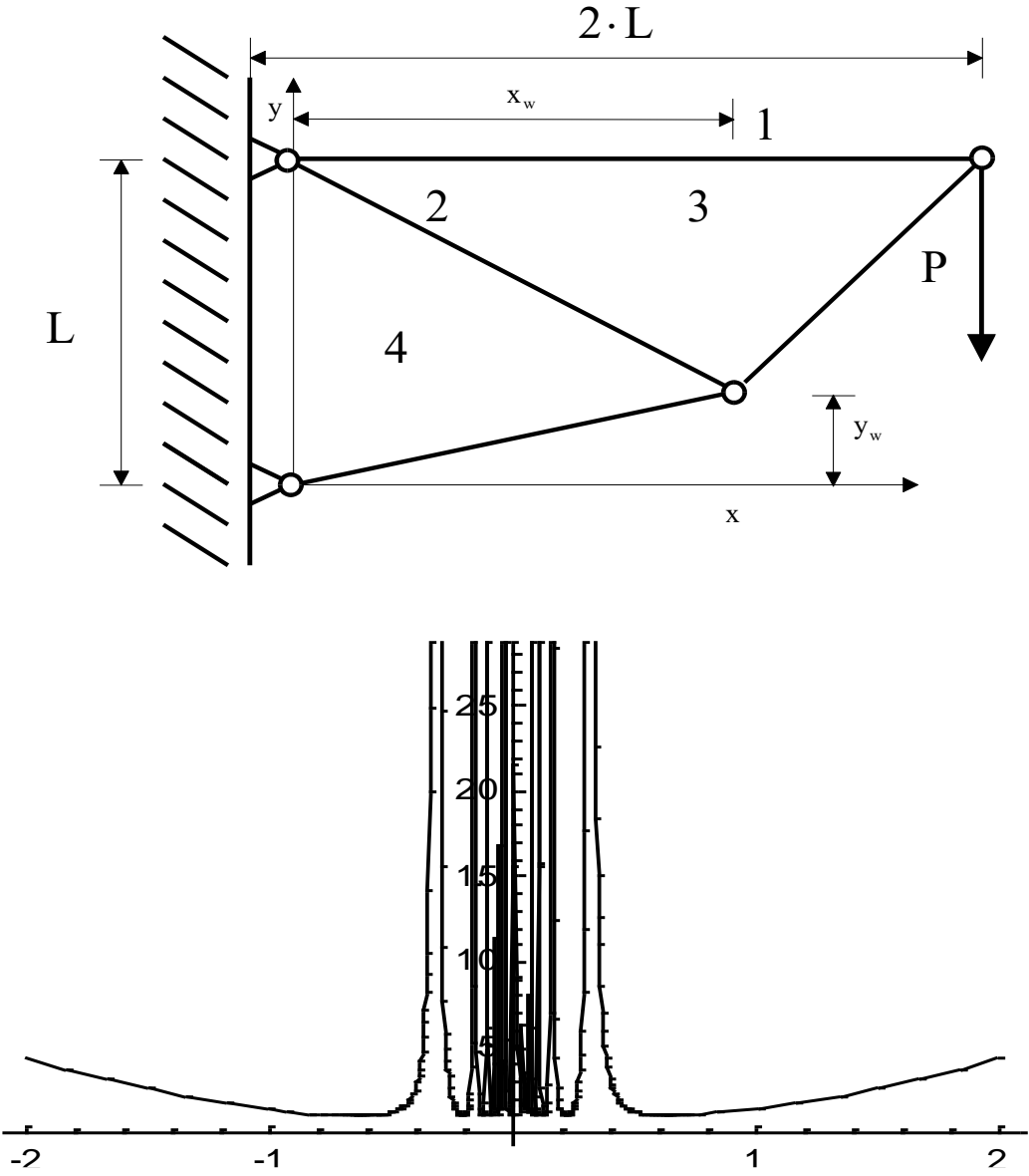
Zastosowanie metod optymalizacji do modelowania układów z niepewnymi parametrami

$$q_i^- \Leftarrow \begin{cases} \min q_i(\mathbf{h}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}} \end{cases}, \quad q_i^+ \Leftarrow \begin{cases} \max q_i(\mathbf{h}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{h} \in \bar{\mathbf{h}} \end{cases}$$

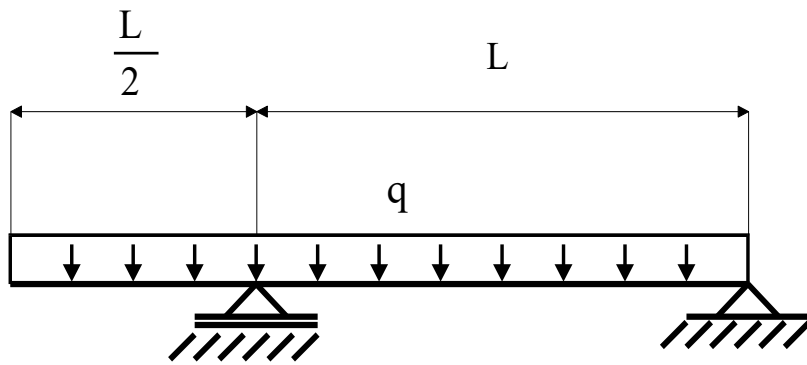


- Procedury przyspieszające
zbieżność algorytmu
- testy monotoniczności
 - przedziałowa metoda Newtona
 - test punktu środkowego
 - test wypukłości itp.

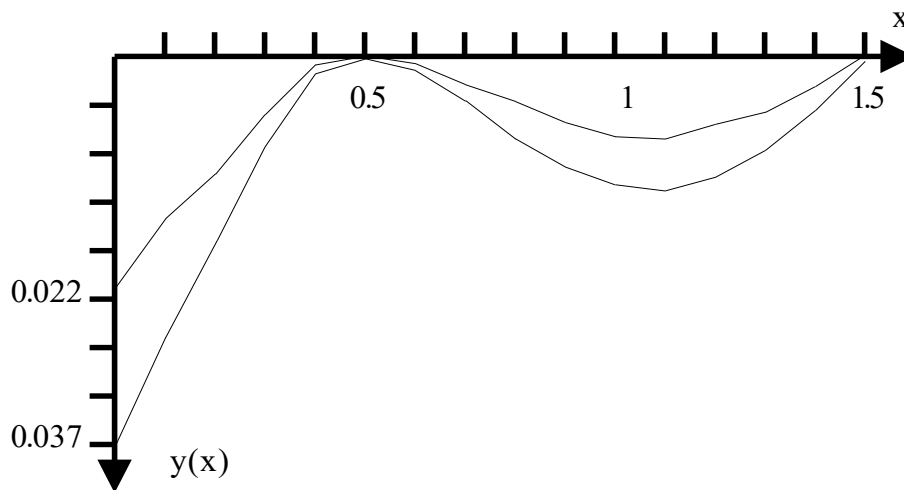
Pownuk A., Optimization of mechanical structures using interval analysis, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, vol. 7, No. 4, 2000, s.699-705



$$f(x) = 1/\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$$



Przedziałowe parametry
 $\bar{E}, \bar{J}, \bar{L}, \bar{q}$



Własności algorytmu

- 1) Wszystkie globalne minima należą do przedziałów zawartych w liście L w każdej iteracji algorytmu.
- 2) Jeśli po przeprowadzeniu obliczeń otrzymamy listę przedziałów o szerokości mniejszej od pewnego $\varepsilon > 0$, to wszystkie globalne minima należą do tych przedziałów.
- 3) Algorytm umożliwia uwzględnienie błędów zaokrągleń.
- 4) Metoda jest szczególnie efektywna dla kwadratowych funkcji celu.
- 5) Metoda jest efektywna dla problemów z wieloma minimami globalnymi. Jeśli minima globalne są położone blisko siebie, to pogarsza to zbieżność algorytmu.
- 6) Algorytm umożliwia optymalizację funkcji nieróżniczkowalnych oraz nieciągłych.
- 7) W przypadku gdy funkcja jest różniczkowalna, można wykorzystać test monotoniczności, wypukłości oraz przedziałową metodę Newtona.

Wnioski

Współczesna analiza przedziałowa została zapoczątkowana przez R. Moore'a w 1966 roku. Po krótkim okresie dużego zainteresowania teoria ta była bardzo silnie krytykowana. Algorytmy z tego okresu nazywane są obecnie "naiwną arytmetyką przedziałową". Dopiero w początkach lat 80-tych pojawiły się pierwsze algorytmy, które umożliwiły efektywne wykorzystanie metod przedziałowych w technice.

Wykorzystując arytmetykę przedziałową można skonstruować algorytmy, które są zbieżne globalnie oraz pozwalają na znalezienie rozwiązania z gwarantowaną dokładnością (tzn. z uwzględnieniem wszystkich błędów, którymi obarczone są rozwiązania numeryczne, w tym błędów zaokrągleń).

W bardzo wielu typowych problemach inżynierskich zależność rozwiązań od parametrów niepewnych jest monotoniczna. W celu sprawdzenia monotoniczności można zastosować punktowe testy monotoniczności. Jeśli monotoniczność funkcji zostanie wykazana, to ekstremalne wartości funkcji mogą zostać obliczone przy pomocy końców przedziałów.

Arytmetyka rozmyta jest uogólnieniem arytmetyki przedziałowej. Podejście takie pozwala na dokładniejszy opis niepewności parametrów.

Zadeh zakładał, że pojęcie zbioru rozmytego jest intuicyjnie zrozumiałe. Podejście takie wywołało dyskusję na temat związku teorii zbiorów rozmytych z rachunkiem prawdopodobieństwa. Pomimo dużej liczby przykładów praktycznych zastosowań występują trudności w jednoznacznej interpretacji technicznej pojęć intuicyjnej teorii zbiorów rozmytych.

Wykorzystując probabilistyczną interpretację zbioru rozmytego teorię zbiorów rozmytych można zastosować do obliczania niezawodności układów mechanicznych. Podobne rezultaty można uzyskać wykorzystując interpretację opartą na teorii zbiorów losowych.