

Andrzej POWNUK<sup>1</sup>

## PRZEDZIAŁOWE METODY OPTIMALIZACJI KONSTRUKCJI

### 1. Wprowadzenie

W ostatnich latach można zaobserwować stale zwiększające się znaczenie metod numerycznych (zwanymi także komputerowymi) w inżynierii lądowej [1,2]. Stosowanie numerycznych modeli konstrukcji umożliwia również ich efektywną optymalizację. Zagadnienia optymalizacji obejmują bardzo szeroką klasę problemów jak np. optymalizacja ze względu na minimalny ciężar, minimalny koszt, maksymalną wytrzymałość, maksymalną niezawodność, optymalizację kształtu, optymalizacja wielokryterialna itp. Zagadnienie optymalizacji konstrukcji możemy sformułować następująco:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Znaleźć minimalną wartość funkcjonału } f(x) \\ \text{przy warunkach ograniczających } p(x)=0 \text{ oraz } q(x)\leq 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

W niniejszej pracy zajmę się przypadkiem, w którym funkcjonał  $f$  jest określony na przestrzeni  $R^n$ , tzn.  $f:R^n \rightarrow R$ ,  $p:R^n \rightarrow R^m$ ,  $q:R^n \rightarrow R^r$ .

Metody poszukiwania globalnego minimum funkcji celu można podzielić na dwie grupy [3]. Pierwszą grupę stanowią heurystyczne metody, które pozwalają na znalezienie globalnego minimum jedynie z pewnym prawdopodobieństwem. Najważniejsze z nich, to algorytmy stochastyczne [4] oraz algorytmy genetyczne [5]. Drugą grupę stanowią metody pozwalające na znalezienie globalnego minimum z pewną znaną dokładnością. Oparte są one na technice zwanej „branch and bound”. Polega ona na podzieleniu obszaru poszukiwania na coraz mniejsze części i sprowadzeniu problemu globalnej optymalizacji do problemu optymalizacji dyskretnej dzięki podzieleniu go na skończoną liczbę podproblemów. Przykładami takich metod są algorytmy optymalizacji kombinatorycznej [3], metodę dc [3], metody optymalizacji oparte na arytmetyce przedziałowej [6-14] oraz metody oparte na oszacowaniu wartości funkcji przy pomocy warunku Lipschitza [3]. Celem pracy jest przedstawienie zastosowań algorytmu przedziałowej optymalizacji w mechanice konstrukcji. Algorytm ten umożliwia oszacowanie globalnego minimum dla dowolnej nieliniowej funkcji celu. Funkcjonał  $f(x)$  może być nieróżniczkowalny, a nawet nieciągły. Algorytm został już zaimplementowany w kilku programach komercyjnych [14].

---

<sup>1</sup> Mgr inż., Politechnika Śląska

## 2. Podstawy matematyki przedziałowej

Analiza przedziałowa jest działem matematyki zajmującym się badaniem własności działań na przedziałach liczbowych [6,10]. Zbiór wszystkich przedziałów liczbowych znajdujących się na osi rzeczywistej  $\mathbb{R}$  oznaczymy przez  $I(\mathbb{R})$ . Element zbioru  $I(\mathbb{R})$  oznaczymy przez:

$$[x] = \{x \in \mathbb{R} : x^- \leq x \leq x^+\} \quad (2)$$

W zbiorze przedziałów możemy wprowadzić działania arytmetyczne:

$$[x] + [y] = [x^- + y^-, x^+ + y^+] \quad (3)$$

$$[x] - [y] = [x^- - y^+, x^+ - y^-] \quad (4)$$

$$[x] \cdot [y] = [\min\{x^- \cdot y^-, x^- \cdot y^+, x^+ \cdot y^-, x^+ \cdot y^+\}, \max\{x^- \cdot y^-, x^- \cdot y^+, x^+ \cdot y^-, x^+ \cdot y^+\}] \quad (5)$$

$$\frac{1}{[x]} = \left[ \frac{1}{x^+}, \frac{1}{x^-} \right], \quad \frac{[x]}{[y]} = [x] \cdot \frac{1}{[y]} \quad (6)$$

$$\text{mid}([x]) = \frac{x^+ + x^-}{2} \quad (7)$$

Naturalnym przedziałowe rozszerzenie funkcji  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , to przedziałowa funkcja  $\hat{f}: I(\mathbb{R})^n \rightarrow I(\mathbb{R})$ , która powstaje z funkcji rzeczywistej poprzez zastąpienie wszystkich zmiennych rzeczywistych  $x_i$  odpowiednimi przedziałami  $[x]_i$  oraz wszystkich działań na liczbach rzeczywistych odpowiednimi działaniami przedziałowymi. Przykładowo gdy  $f(x) = x^2 - x$ , to  $\hat{f}([x]) = [x] \cdot [x] - [x]$ . Przedziałowe rozszerzenie funkcji nie jest określone jednoznacznie. Najważniejszą własnością naturalnego przedziałowego rozszerzenia funkcji jest następujące twierdzenie:

$$\forall_{[x] \in I(\mathbb{R})} \{f(x) : x \in [x]\} \subseteq \hat{f}([x]) \quad (8)$$

Przedziałowy układ równań liniowych jest to układ równań którego macierz układu i wektor wyrazów wolnych składa się z przedziałów liczbowych:

$$[\mathbf{A}]\mathbf{X} = [\mathbf{B}], \text{ gdzie } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [a_{11}] & \dots & [a_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn}] \end{bmatrix}, [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [b_1] \\ \dots \\ [b_n] \end{bmatrix} \quad (9)$$

Rozwiązanie przedziałowego układu równań jest określone następująco:

$$\sum_{\exists \exists} ([\mathbf{A}], [\mathbf{B}]) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \mathbf{B} \in [\mathbf{B}]\} \quad (10)$$

Rozwiązanie  $\sum_{\exists \exists} ([\mathbf{A}], [\mathbf{B}])$  jest zwykle bardzo skomplikowanym zbiorem [9,11] dlatego w zastosowaniach posługujemy się najmniejszym n-wymiarowym przedziałem, który zawiera w sobie rozwiązanie dokładne. Przedziałowe układy równań są wykorzystywane w przedziałowej metodzie Newtona [11], która umożliwia znalezienie wszystkich pierwiastków układu nieliniowych równań algebraicznych. Wspólną cechą wielu metod opartych na matematyce przedziałowej jest globalna zbieżność, uwzględnianie błędów zaokrągleń, przeprowadzanie obliczeń z tzw. gwarantowaną pewnością oraz możliwość operowania na funkcjach nieróżniczkowalnych, a nawet nieciągłych.

### 3. Algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej

Niech dana jest funkcja  $f: \mathbb{R}^n \supset X \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^1$  oraz dwa rozłączne przedziały  $[x_1], [x_2] \subset \mathbb{R}^n$ . Jeśli

$$\hat{f}([x_1])^+ < \hat{f}([x_2])^- \quad (11)$$

to z własności naturalnego przedziałowego rozszerzenia funkcji  $f$  wynika, że globalne minimum funkcji  $f$  nie może znajdować się w przedziale  $[x_2]$ . Powyższa własność jest podstawą algorytmu przedziałowej optymalizacji globalnej.

Podstawowym algorytmem obliczeń metodą przedziałowej optymalizacji globalnej jest algorytm Moore-Skelboe'a [13]. Niech  $[x_0]$  oznacza przedział początkowy, w którym poszukujemy rozwiązania.

**Algorytm** (Moore-Skelboe)

- 1) Przyjąć  $[y] := [x_0]$ .
- 2) Obliczyć  $\hat{f}([x])$ .
- 3) Przyjąć  $y = \hat{f}([y])^-$ .
- 4) Zainicjować listę  $L = ([y], y)$ .
- 5) Wybrać współrzędną „k” wzdłuż której przedział  $[y]$  ma największą szerokość  
$$k \in \left\{ i: \max_{j \in \{1, \dots, n\}} w([y]_j) = w([y]_i) \right\}.$$
- 6) Podzielić przedział  $[y]$  wzdłuż „k”-tej współrzędnej na dwa przedziały  $[v_1], [v_2]$ .
- 7) Obliczyć  $\hat{f}([v_1]), \hat{f}([v_2])$ .
- 8) Przyjąć  $v_i = \hat{f}([v_i])^-$  dla  $i=1,2$ .
- 9) Usunąć  $([y], y)$  z listy L.
- 10) Włączyć pary  $([v_1], v_1), ([v_2], v_2)$  do listy L w taki sposób aby elementy  $v_i$  były w porządku niemalejącym.
- 11) Oznaczyć pierwszą parę listy L jako  $([y], y)$ .
- 12) Jeżeli kryteria zatrzymania obliczeń są spełnione, to idź do punktu 14.
- 13) Idź do punktu 5.
- 14) Stop.

E.R. Hansen zmodyfikował algorytm tak, że oprócz wartości globalnego minimum  $f_{\min} = \min_{x \in [X_0]} f(x)$  poszukiwał punktów  $x \in [X_0]$  dla których funkcja celu przyjmuje wartość

minimalną [7,13]. Umożliwiło to wykorzystanie algorytmu przedziałowej optymalizacji do rozwiązywania układów nieliniowych równań algebraicznych [7].

#### 4. Procedury przyspieszające zbieżność algorytmu

Rozważymy pewien przedział  $[x]$  leżący we wnętrzu przedziału początkowego  $[x_0]$  ( $[x] \subset [x_0]$ ). Z własności przedziałowego rozszerzenia funkcji wynika, że gdy:

$$0 \notin \frac{\partial \hat{f}([x])}{\partial x_i} \quad (12)$$

to funkcja celu na pewno nie posiada globalnego minimum w przedziale  $[x]$  i możemy go odrzucić w dalszych obliczeniach. Jest to tzw. test monotoniczności.

Okazuje się, że sprawdzanie nierówności (11) nie jest zawsze konieczne. Analogiczne rezultaty można uzyskać sprawdzając następujący warunek:

$$f(\text{mid}([x_1])) < \hat{f}([x_2]) \quad (13)$$

Gdy warunek (13) jest spełniony wtedy globalne minimum na pewno nie znajduje się w przedziale  $[x_2]$  i możemy go odrzucić w dalszych obliczeniach. Jest to tzw. test punktu środkowego.

Test punktu środkowego przynosi tym lepsze efekty im wartość po lewej stronie nierówności (13) jest mniejsza. Dlatego do poszukiwania minimalnej wartości funkcji celu możemy wykorzystać inne algorytmy optymalizacyjne. Najczęściej korzysta się tutaj z algorytmów gradientowych.

Jeżeli funkcja celu jest różniczkowalna oraz posiada lokalne minimum w punkcie  $x_0$ , to

$$\text{grad } f(x_0) = 0 \quad (14)$$

Zatem jeśli równanie (14) nie posiada żadnego pierwiastka w przedziale  $[x]$ , to globalne minimum na pewno nie znajduje się w tym przedziale i możemy go odrzucić w dalszych obliczeniach. Do znajdowania wszystkich pierwiastków równania (14) wykorzystujemy przedziałową metodę Newtona [7,11].

Jeżeli funkcja celu jest klasy  $C^2$ , to warunkiem koniecznym wypukłości funkcji jest dodatnia określoność hesjanu funkcji celu. Warunkiem koniecznym dodatniej określoności hesjanu jest by wszystkie elementy diagonalne  $h_{ii}(x_0)$  były nieujemne. Dlatego gdy dla jakiegokolwiek  $i=1,\dots,n$   $h_{ii}(x_0) < 0$  wtedy w punkcie  $x_0$  funkcja celu  $f$  nie może mieć lokalnego ekstremum w punkcie  $x_0$ . Z własności naturalnego przedziałowego rozszerzenia funkcji  $f$  wynika, że gdy dla jakiegokolwiek  $\hat{h}_{ii}([x]) < 0$ , to globalne minimum nie może znajdować się w przedziale  $[x]$  i możemy go odrzucić w dalszych obliczeniach.

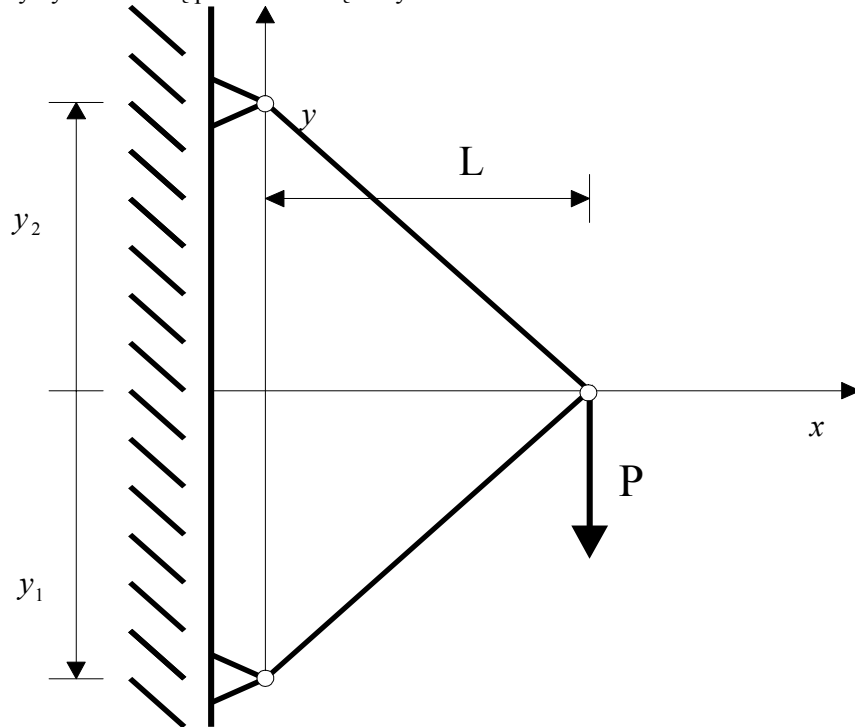
Algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej oparty jest na nierówności (11). Efektywność algorytmu wzrasta gdy wartość przedziałowego rozszerzenia funkcji na przedziale  $[x]$  jest zbliżona do obrazu przedziału  $[x]$  poprzez odwzorowanie  $f$ . Dlatego zamiast naturalnego przedziałowego rozszerzenia funkcji  $f$  korzystamy z innych sposobów konstrukcji przedziałowego rozszerzenia [12]. Najważniejszym jest tzw. forma średnia

$$f([x]) = f(\bar{x}) + ([x] - \bar{x})^T \hat{f}'([x]), \text{ gdzie } \bar{x} := \text{mid}([x]) \quad (15)$$

W celu przyspieszenia obliczania wartości pochodnych stosujemy techniki zwane automatycznym różniczkowaniem [11]. Czas obliczeń skraca się również po zastosowaniu algorytmów obliczeń równoległych.

## 5. Przykłady zastosowań

Rozważmy kratownicę przedstawioną na rysunku 1.



Rys. 1. Optymalny kształt kratownicy-przykład 1

Będziemy poszukiwali optymalnego kształtu kratownicy przedstawionej na rysunku 1. Zagadnienie to jest równoważne minimalizacji następującego funkcjonału:

$$f = \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^4 |N_i| L_i \quad (16)$$

bez warunków ograniczających, przy czym symbol  $N_i$  oznacza i-tą siłę osiową w pręcie,  $L_i$  jest długością i-tego pręta, a  $\sigma_0$  jest naprężeniem dopuszczalnym materiału z którego wykonany jest pręt. Przyjmujemy następujące dane liczbowe  $L=1$  m,  $\sigma_0 = 190$  MPa . Wyniki obliczeń przedstawia tabela 1.

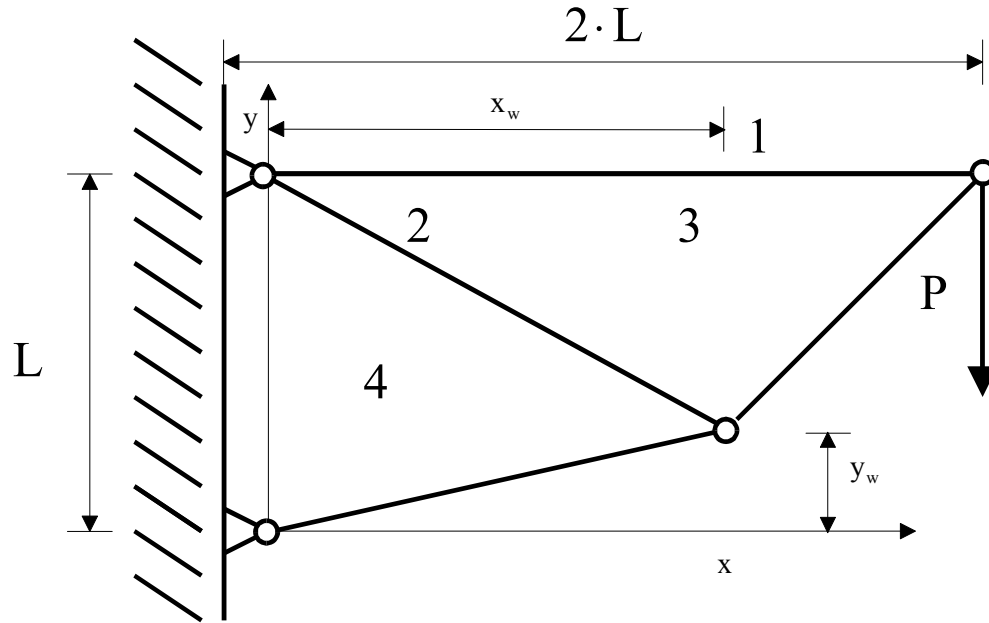
Tabela 1. Optymalne charakterystyki kratownicy przedstawionej na rysunku 1

Eps	P [kN]	$y_1$ [m]	$y_2$ [m]	A [m <sup>2</sup> ]	$J_{\min}$ [m <sup>3</sup> ]
0.001	100	[-1.03915, -0.9613]	[0.9613, 1.03915]	[0.000366, 0.000379]	$1.0518 \cdot 10^{-3}$
0.0001	100	[-1.01207, -0.98623]	[0.98623, 1.01207]	[0.00037, 0,000374]	$1.0525 \cdot 10^{-3}$
0.001	1000	[-1.039154, -0.961338]	[0.961338, 1.039154]	[0.003661, 0.003786]	$10.518 \cdot 10^{-3}$

W drugim przykładzie będziemy poszukiwali kratownicy o minimalnym ciężarze zmieniając położenie węzła  $(x_w, y_w)$  (por. rys. 2). Po przyjęciu danych liczbowych  $L=1$  m,  $\sigma_0 = 190$  MPa wyniki obliczeń przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2. Optymalne charakterystyki kratownicy przedstawionej na rysunku 2

P.	Rozwiązanie optymalne			
10 kN	$x_w$ [m]	$y_w$ [m]	$J$ [m <sup>3</sup> ]	minJ [m <sup>3</sup> ]
	1.189579	0.223488	$4.10272 \cdot 10^{-4}$	$4.10070 \cdot 10^{-4}$
	$A_1$ [m <sup>2</sup> ]	$A_2$ [m <sup>2</sup> ]	$A_3$ [m <sup>2</sup> ]	$A_4$ [m <sup>2</sup> ]
	$5.492992 \cdot 10^{-5}$	$6.010761 \cdot 10^{-5}$	$7.60748 \cdot 10^{-5}$	$1.071047 \cdot 10^{-4}$
	Przedział zawierający rozwiązanie optymalne			
	$x^-$ [m]	$x^+$ [m]	$y^-$ [m]	$y^+$ [m]
	1.124272	1.218754	0.183575	0.245975
	Liczba iteracji	Pozostałe przedziały	Maksymalna szerokość przedziału	
	25	15623	0.000244139	
	P.	Rozwiązanie optymalne		
100 kN	$x_w$ [m]	$y_w$ [m]	$J$ [m <sup>3</sup> ]	minJ [m <sup>3</sup> ]
	1.189579	0.223488	$4.10272 \cdot 10^{-3}$	$4.10070 \cdot 10^{-3}$
	$A_1$ [m <sup>2</sup> ]	$A_2$ [m <sup>2</sup> ]	$A_3$ [m <sup>2</sup> ]	$A_4$ [m <sup>2</sup> ]
	$5.492992 \cdot 10^{-4}$	$6.010761 \cdot 10^{-4}$	$7.60748 \cdot 10^{-4}$	$1.071047 \cdot 10^{-3}$
	Przedział zawierający rozwiązanie optymalne			
	$x^-$ [m]	$x^+$ [m]	$y^-$ [m]	$y^+$ [m]
	1.124272	1.218754	0.183575	0.245975
	Liczba iteracji	Pozostałe przedziały	Maksymalna szerokość przedziału	
	25	15623	0.000244139	
	P.	Rozwiązanie optymalne		
1000 kN	$x_w$	$y_w$	$J$ [m <sup>3</sup> ]	minJ [m <sup>3</sup> ]
	1.189579	0.223488	$4.10272 \cdot 10^{-2}$	$4.10070 \cdot 10^{-2}$
	$A_1$ [m <sup>2</sup> ]	$A_2$ [m <sup>2</sup> ]	$A_3$ [m <sup>2</sup> ]	$A_4$ [m <sup>2</sup> ]
	$5.492992 \cdot 10^{-3}$	$6.010761 \cdot 10^{-3}$	$7.60748 \cdot 10^{-3}$	$1.071047 \cdot 10^{-2}$
	Przedział zawierający rozwiązanie optymalne			
	$x^-$ [m]	$x^+$ [m]	$y^-$ [m.]	$y^+$ [m]
	1.124272	1.218754	0.183575	0.245975
	Liczba iteracji	Pozostałe przedziały	Maksymalna szerokość przedziału	
	25	15623	0.000244139	



Rys. 2. Optymalny kształt kratownicy-przykład 2

## 6. Wnioski

W optymalizacji konstrukcji bardzo często posługujemy się funkcjami celu, które nie są różniczkowalne. Przykładem takiej funkcji jest funkcjonal (16) ponieważ zawiera wartości bezwzględne sił osiowych  $N_i$ , które to funkcje nie są różniczkowalne. Zatem nie można do jej optymalizacji bezpośrednio stosować tradycyjnych algorytmów wykorzystujących tę własność. W mechanice budowli bardzo często występują funkcje nieciągłe. Przykładem mogą tutaj być funkcje określające siły wewnętrzne oraz obciążenie powierzchniowe i objętościowe. Do optymalizacji nieciągłych oraz nieróżniczkowalnych funkcji celu można wykorzystywać algorytmy genetyczne, metodę bezgradientową Hooke'a-Jeevesa, metodę bezgradientową Powella, metodę złotego podziału, algorytmy optymalizacji dyskretnej i wiele innych. Jednak żaden z tych algorytmów nie potrafi zagwarantować, że otrzymane minimum jest globalne. Metoda przedziałowej optymalizacji globalnej jest jedyną metodą, która pozwala znaleźć oszacowanie globalnego minimum dla funkcji celu, która jest nieliniowa, nieróżniczkowalna, a nawet nieciągła. Oszacowanie globalnego minimum otrzymane metodą przedziałowej optymalizacji globalnej jest poprawne, w każdym kroku iteracyjnym co daje możliwość przerywania obliczeń w dowolnym momencie lub gdy osiągnięta zostanie założona dokładność. Użycie procedur przyspieszających zbieżność znacznie skraca czas obliczeń. Jedną z takich procedur opartą jest na poszukiwaniu minimum funkcji celu w danym podprzedziale. W tym celu można wykorzystać dowolną metodę minimalizacji. Daje to możliwość tworzenia metod hybrydowych. Zaprezentowane przykłady potwierdzają, że metodę można wykorzystać do rozwiązywania praktycznych problemów inżynierskich. Podstawową wadą metody przedziałowej optymalizacji globalnej jest jej stosunkowo wolna zbieżność zwłaszcza w przypadkach gdy funkcja celu ma wiele lokalnych minimów niewiele różniących się od minimum globalnego.

## Literatura

- [1] GOMULIŃSKI A., RAKOWSKI G., Problemy mechaniki budowli i technik komputerowych w ostatnim dziesięcioleciu, *Inżynieria i budownictwo*, Nr 9, 1998, s.482-485
- [2] KLEIBER M.(red.), *Mechanika Techniczna. Tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. Warszawa, PWN, 1995
- [3] HUYER W., NEUMAIER A., Global optimization by multilevel coordinate search, *Journal of Global Optimization*. (przyjęty do druku)
- [4] ZIELIŃSKI R., NEUMANN P., *Stochastyczne metody poszukiwania minimum funkcji*, Warszawa, WNT, 1986
- [5] MICHALEWICZ Z., *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, Warszawa, WNT, 1996
- [6] ALEFELD G., HERZBERGER J., *Introduction to Interval Computation*. New York, Academic Press, 1983
- [7] HANSEN E.R., *Global optimization using interval methods*. New York, Marcel Dekker, 1992
- [8] HYVÖNEN E., DE PASCALE S., GIA InC++ *Global Interval Arithmetic and Optimization Library*, Helsinki, Delisoft Ltd. 1997
- [9] KULPA Z., POWNUK A., SKALNA I., 1998, Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods, *CAMES*, Vol.5, No.4, 38 s.
- [10] MOORE R.E., *Interval Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, 1966
- [11] NEUMAIER A., *Interval methods for systems of equations*, New York, Cambridge University Press, 1990
- [12] RATSCHKE H., ROKNE J., *Computer Method for the Range of Function*, New York, John Willey & Sons, 1984
- [13] RATSCHKE H., ROKNE J., *New Computer Methods for Global Optimization*, New York, John Willey & Sons, 1988
- [14] VAN HENTENRYCK P., MICHEL L., DEVILLE Y., *Numerica: A Modeling Language for Global Optimization*, Cambridge, MIT Press, 1997

## OPTIMIZATION OF STRUCTURES USING INTERVAL ANALYSIS

### Summary

**Summary.** The paper presents applications of the interval global optimization method in civil engineering. Many information about interval analysis can be found on the internet (<http://cs.utep.edu/interval-comp/main.html>). An interval global optimization method is very stable and robust, universally applicable and 100% reliable. The interval algorithm guarantees that all stationary global solutions have been found. The aim of this work is to show that algorithm of interval global optimization is an effective tool for optimization of structures. The algorithm is applied to shape optimization of truss structures.

Praca została wykonana w ramach grantu KBN Nr 8T11F00615 pt. „Przedziałowe i jakościowe metody modelowania niepewności w układach fizycznych”.