

Andrzej POWNUK¹

ZASTOSOWANIE METOD ANALIZY WRAŻLIWOŚCI DO MODELOWANIA KONSTRUKCJI Z PRZEDZIAŁOWYMI PARAMETRAMI

1 Wprowadzenie

Wartości wszystkich parametrów układów mechanicznych obciążone są pewną niepewnością [1]. Gdy dysponujemy dużą liczbą danych pomiarowych i mają one charakter losowy, to do modelowania wartości wykorzystuje się metody probabilistyczne [2]. Zwykle jednak nie mamy dostatecznej liczby informacji aby określić niezbędne charakterystyki probabilistyczne projektowanej konstrukcji. W niniejszej pracy rozważać będę przypadek gdy można niepewne parametry konstrukcji h_i można określić z dokładnością do przedziału $[h_i] = [h_i^-, h_i^+]$ [1]. Wiele konstrukcji można opisać przy pomocy układu nieliniowych równań algebraicznych zależnych od wektora niepewnych parametrów \mathbf{h}

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

gdzie \mathbf{F} jest określoną funkcją. Zbiór rozwiązań równania (1) można określić następująco [3]

$$\mathbf{q}([\mathbf{h}]) = \{ \mathbf{q} : \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \mathbf{h} \in [\mathbf{h}] = [h_1^-, h_1^+] \times \dots \times [h_m^-, h_m^+] \} \quad (2)$$

Zbiór ten jest bardzo skomplikowany, dlatego też w zastosowaniach posługujemy się najmniejszym wielowymiarowym przedziałem [3], który zawiera w sobie zbiór rozwiązań (2). Zbiór ten oznaczamy:

$$\text{hull } \mathbf{q}([\mathbf{h}]) = [\inf \mathbf{q}([\mathbf{h}]), \sup \mathbf{q}([\mathbf{h}])] \quad (3)$$

Znanych jest wiele metod poszukiwania zbioru (3). Można pokazać, że zagadnienie dokładnego określenia zbioru (3) w ogólności posiada bardzo wysoką złożoność obliczeniową [3]. Jednak badając przypadki szczególne można skonstruować bardziej efektywne algorytmy [4]. Na podstawie wielu symulacji numerycznych [5] można zauważyć,

¹Mgr inż., Wydział Budownictwa Politechniki Śląskiej

że w większości zagadnień inżynierskich zależność $q_i(\dots, h_j, \dots)$ jest monotoniczna. W takim przypadku zbiór (3) można określić na podstawie wartości skrajnych przedziału $[\mathbf{h}]$, co znacznie upraszcza obliczenia. Gdy funkcja $q_i(\dots, h_j, \dots)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły oraz pochodna posiada stały znak dla $\mathbf{h}^* \in [\mathbf{h}]$, to zbiór (3) określamy na podstawie algorytmu:

$$\text{jeśli } \frac{\partial q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j} > 0, \text{ to } q_i^- = q_i(\dots, h_j^-, \dots) \text{ oraz } q_i^+ = q_i(\dots, h_j^+, \dots), \quad (4)$$

$$\text{jeśli } \frac{\partial q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j} < 0, \text{ to } q_i^- = q_i(\dots, h_j^+, \dots) \text{ oraz } q_i^+ = q_i(\dots, h_j^-, \dots) \quad (5)$$

W skrócie można te reguły zapisać następująco:

$$\mathbf{q}^- = \mathbf{q}(\mathbf{h} \left[\begin{array}{c} -\text{sgin}\left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{h}^*)}{\partial \mathbf{h}}\right) \end{array} \right]), \quad \mathbf{q}^+ = \mathbf{q}(\mathbf{h} \left[\begin{array}{c} \text{sgin}\left(\frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{h}^*)}{\partial \mathbf{h}}\right) \end{array} \right]). \quad (6)$$

2 Punktowe testy monotoniczności

2.1 Metoda zerowego rzędu

Z własności pochodnej funkcji ciągłej wynika, że jeśli dla ustalonej wartości h_j^*

$$\left| \frac{\partial q_i(h_j^*)}{\partial h_j} \right| \gg 0, \quad (7)$$

to funkcja ta zachowuje znak w pewnym otoczeniu punktu h_j^* , czyli

$$\text{sign}\left(\frac{\partial q_i(h_j)}{\partial h_j}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial q_i(h_j^*)}{\partial h_j}\right) \quad \text{dla } h_j \in [h_j^* - \varepsilon, h_j^* + \varepsilon] \quad (8)$$

W przypadku zagadnień nieliniowych pochodne funkcji $q_i(\dots, h_j, \dots)$ obliczamy przy pomocy metody różnic skończonych [6] lub metod analizy wrażliwości [6]:

$$\frac{\partial^{\tau+\Delta\tau} \mathbf{q}}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial^\tau \mathbf{q}}{\partial \mathbf{h}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{q}}{\partial \mathbf{h}} \quad (9)$$

Można również określić wrażliwość rozwiązania w zagadnieniach dynamicznych [6].

2.2 Metoda rzędu pierwszego

Można zastosować liniową aproksymację pochodnej funkcji $q_i(\dots, h_j, \dots)$:

$$\frac{\partial q_i(h_j)}{\partial h_j} \approx \frac{\partial q_i(h_j^*)}{\partial h_j} + \frac{\partial^2 q_i(h_j^*)}{\partial h_j^2} (h_j - h_j^*) \quad (10)$$

Przyrównując do zera wyrażenie (10) można pokazać, że funkcja $q_i(\dots, h_j, \dots)$ jest monotoniczna jeśli

$$h_j = h_j^* - \frac{\partial q_i(h_j^*)}{\partial h_j} / \frac{\partial^2 q_i(h_j^*)}{\partial h_j^2} \notin [h_j^-, h_j^+] \quad (11)$$

Traktując funkcję $q_i(\dots, h_j, \dots)$ jako funkcję wielu zmiennych można przyjąć

$$\frac{\partial q_i(\mathbf{h})}{\partial h_j} \approx \frac{\partial q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j \partial h_k} (h_k - h_k^*) \quad (12)$$

Poszukując punktów $\mathbf{h}^* \in [\mathbf{h}]$ dla których pochodna jest równa zero otrzymujemy nową procedurę sprawdzania monotoniczności. Funkcje $q_i(\dots, h_j, \dots)$ są monotoniczne, gdy

$$h_k(t^*) = h_k^* - \frac{\partial q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j \partial h_k} t^* \notin [h_k^-, h_k^+] \quad \text{dla } k = 1, \dots, m \quad (13)$$

gdzie

$$t^* = \frac{\partial q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j} / \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial^2 q_i(\mathbf{h}^*)}{\partial h_j \partial h_k} \right)^2 \quad (14)$$

3 Zagadnienia optymalizacji

W zagadnieniach optymalizacji konstrukcji zarówno funkcja celu f , jak i rozwiązanie optymalne \mathbf{x}^* , jest funkcją wektora parametrów niepewnych \mathbf{h} , dlatego rozwiązania problemów optymalizacji należą do następujących zbiorów

$$f([\mathbf{h}]) = \{f(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in [\mathbf{h}]\}, \quad \mathbf{x}^*([\mathbf{h}]) = \{\mathbf{x}^*(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in [\mathbf{h}]\} \quad (15)$$

Informacje na temat metod określania zbiorów (15) można znaleźć w pracach [7, 8]. Jeśli przedział $[\mathbf{h}]$ jest dostatecznie wąski, to zbiory (15) można określić przy pomocy punktowych testów monotoniczności i wzorów (6). Niech dana jest funkcja celu f , która jest zależna od wektora parametrów niepewnych $\mathbf{h} \in [\mathbf{h}]$ oraz wektora zmiennych decyzyjnych $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$.

Zakładając brak warunków ograniczających, to z własności naturalnego przedziałowego rozszerzenia funkcji [3] wynika, że jeśli

$$0 \notin \frac{\partial \hat{f}([\mathbf{x}], [\mathbf{h}])}{\partial h_j} \quad (16)$$

to funkcja celu zależy monotonicznie od parametru h_j , zatem ekstremalne wartości funkcji celu można obliczyć na podstawie wartości skrajnych przedziału $[\mathbf{h}]$. W przypadku gdy przedziały $[\mathbf{x}]$ i $[\mathbf{h}]$ są dostatecznie wąskie można tutaj wykorzystać również punktowe testy monotoniczności opisane w punkcie 2. Gdy znamy już odpowiednie końce przedziału $[\mathbf{h}]$ oznaczone tutaj $\mathbf{h}^-, \mathbf{h}^+$ można obliczyć ekstremalne wartości funkcji celu stosując tradycyjne algorytmy optymalizacji szukając minimów następujących funkcji celu $f(\mathbf{x}, \mathbf{h}^-), f(\mathbf{x}, \mathbf{h}^+)$.

Gdy szukamy ekstremalnych wartości rozwiązania optymalnego \mathbf{x}^* można skorzystać z punktowego testu monotoniczności opisanego w punkcie 2. W przypadku gdy funkcja celu jest różniczkowalna, to rozwiązanie optymalne jest rozwiązaniem następującego równania:

$$\nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{F} = \nabla f \quad (17)$$

Pochodną rozwiązania optymalnego można obliczyć na podstawie równania:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{h}} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0} \quad (18)$$

W przypadku optymalizacji z ograniczeniami można zastosować punktowy test monotoniczności.

4 Niezawodność układów z losowymi i przedziałowymi parametrami

Niezawodność konstrukcji [2] można określić następująco:

$$R(\mathbf{h}_0) = P\{g(\mathbf{h}_0, \mathbf{r}) > 0\} = \int_{g(\mathbf{h}_0, \mathbf{r}) > 0} f_{\mathbf{r}}(\mathbf{h}_0, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (19)$$

gdzie g jest funkcją graniczną konstrukcji [2], f jest funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, \mathbf{h} jest wektorem parametrów określonych z dokładnością do przedziału liczbowego $[\mathbf{h}]$, \mathbf{h}_0 jest ustaloną wartością parametru \mathbf{h} , \mathbf{r} jest wektorem parametrów losowych.. Zbiór wszystkich wartości jakie może przyjmować niezawodność układu określamy następująco:

$$[R] = [R^-, R^+] = \text{hull } R([\mathbf{h}]) = \text{hull}\{R(\mathbf{h}_0) : \mathbf{h}_0 \in [\mathbf{h}]\} \quad (20)$$

Ekstremalnych wartości niezawodności konstrukcji szukamy na podstawie wzoru (6) oraz punktowych testów monotoniczności opisanych w punkcie 2.

5 Modelowanie konstrukcji z przedziałowymi parametrami

Przyjmując

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{q} - \mathbf{Q}(\mathbf{h}) \quad (21)$$

równania równowagi statyki konstrukcji liniowo-sprężystych z przedziałowymi parametrami \mathbf{h} przyjmują postać (1). Można pokazać [4,9], że jeśli następujące przedziałowe macierze Jakobiego

$$\frac{\partial(\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n)}{\partial(q_1, \dots, q_m)}([\mathbf{q}], [\mathbf{h}]), \quad \frac{\partial(\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n)}{\partial(q_1, \dots, h_j, \dots, q_m)}([\mathbf{q}], [\mathbf{h}]) \quad (22)$$

są regularne [3], to funkcja $q_i = q_i(\dots, h_j, \dots)$ jest monotoniczna w przedziale $[\mathbf{h}]$. Sprawdzenia regularności macierzy przedziałowej można dokonać różnymi metodami [10]. Ponadto można wyróżnić kilka przypadków szczególnych.

- 1) W układach liniowo-sprężystych zależność przemieszczeń od przedziałowych obciążeń jest zawsze monotoniczna [4].
- 2) W płaskich układach prętowych zależność przemieszczeń od przedziałowego modułu Younga jest monotoniczna. Wynika to z postaci równań równowagi.

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \Rightarrow E \cdot \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \frac{1}{E}\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{q} = \frac{1}{E}\tilde{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \quad (23)$$

- 1) Gdy elementy macierzy sztywności \mathbf{K} i wektora obciążeń \mathbf{Q} są liniowymi funkcjami niepewnych parametrów, to zbiór (3) można znaleźć przy pomocy metody Rump'a [5].

W wielu przypadkach nie możemy określić dokładnej wartości parametrów h_i , a jedynie przedziały $[h_i^-, h_i^+]$ do których wielkości te należą. W wyniku wykonania serii n pomiarów otrzymujemy zbiór przedziałów $\Xi_i = \{[h_{i1}], [h_{i2}], \dots, [h_{in}]\}$. Definiujemy przy tym pewną funkcję m_i przyporządkowującą każdemu elementowi zbioru Ξ_i prawdopodobieństwo jego wystąpienia podczas pomiarów $m([h_{ij}]) = p_j$ ($j=1, \dots, n$ oraz $p_1 + \dots + p_n = 1$). Parę (Ξ_i, m_i) nazywamy zbiorem losowym [11]. W oparciu o zbiór losowy można określić funkcję przynależności zbioru rozmytego \tilde{h}_i [11]:

$$\mu(h_i | \tilde{h}_i) = \sum_{h_k \in [h_k]} m_i([h_k]) \quad \text{gdzie } [h_k] \in \Xi_i \quad (24)$$

Jeśli współrzędne wektora niepewnych parametrów \mathbf{h} będą liczbami rozmytymi \tilde{h}_i , to rozwiązanie równania (1) otrzymujemy w dwóch etapach. Najpierw dla poszczególnych α -przekrojów [11] otrzymujemy rodzinę przedziałowych rozwiązań $[\mathbf{q}_\alpha]$:

$$[\mathbf{q}_\alpha] = \text{hull}\mathbf{q}([\mathbf{h}_\alpha]) = \text{hull}\{\mathbf{q}(\mathbf{h}) : \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \mathbf{h} \in [\mathbf{h}_\alpha]\} \quad (25)$$

gdzie

$$[h_{i\alpha}] = \{h_i : \mu(h_i | \tilde{h}_i) \geq \alpha\} \quad \text{i} \quad [\mathbf{h}_\alpha] = [h_{1\alpha}] \times \dots \times [h_{m\alpha}] \quad (26)$$

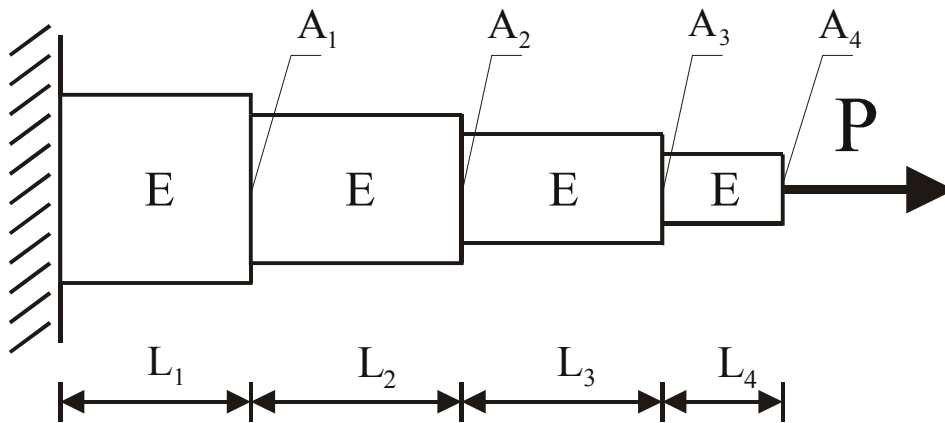
Następnie rozwiązanie określamy jako wektor liczb rozmytych \tilde{q}_i przy pomocy następującej reguły [12]:

$$\mu(q_i | \tilde{q}_i) = \max\{\alpha : q_i \in [q_{i\alpha}]\} \quad (27)$$

6 Przykłady zastosowań

6.1 Rozciąganie pręta wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego z przedziałowymi parametrami

Rozważmy układ prętowy przedstawiony na rysunku 1 wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego z wzmocnieniem kinematycznym i izotropowym, w którym przedziałowymi parametrami będą moduł Younga E oraz przekroje prętów A_i .



Rys. 1. Układ prętów rozciąganych

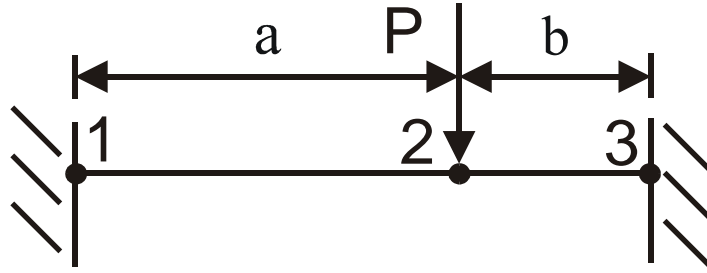
W obliczeniach przyjęto następujące stałe materiałowe $\zeta = 7 \cdot 10^7$, $\zeta_{\text{kin}} = 0.1 \cdot \zeta$, $\zeta_{\text{iso}} = 0.9 \cdot \zeta$. $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 1 \text{ m}$, $\sigma_0 = 190 \text{ MPa}$, $E \in [2.0 \cdot 10^5, 2.2 \cdot 10^5] \text{ MPa}$, $A_0 \in [0.0009, 0.001] \text{ m}^2$, $A_i \in i \cdot [A_0]$, $P = 30 \text{ kN}$. W obliczeniach wykorzystano wzór (6). Wyniki obliczeń przedstawione są w tablicy 1.

Tablica 1. Przemieszczenia węzłów układu prętowego

	q_1	q_2	q_3	q_4
q_i^- [m]	0.001148,	0.002296	0.002870	0.003252
q_i^+ [m]	0.006707	0.013414	0.016790	0.019056

6.2 Niezawodność pręta zginanego

Weźmy pod uwagę układ prętowy przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Pręt zginany

Zakładając, że siła P oraz plastyczna nośność graniczna są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym, a długości a i b są określone z dokładnością do przedziału liczbowego. Ekstremalne wartości niezawodności układu można określić przy pomocy metody różnic skończonych, punkowego testu monotoniczności, wzoru (6) i programu STRUREL [13]. W obliczeniach przyjęto następujące dane liczbowe $\bar{P} = 15 \text{ kN}$, $\sigma_p = 1.59 \text{ kN}$, $\bar{M}_{pl} = 81 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $\sigma_M = 9,26 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $a \in [0.695, 0.705] \text{ m}$, $b \in [0.295, 0.305] \text{ m}$. Funkcja graniczna [2] ma w tym przypadku następującą postać:

$$g(M_1, M_2, M_3, P, a, b) = \frac{M_1}{a} + M_2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{M_3}{b} - P \quad (28)$$

gdzie M_1, M_2, M_3 , to momenty plastyczne przyłożone odpowiednio w punktach 1, 2 i 3. Używając programu STRUREL na podstawie funkcji granicznej (28) można obliczyć:

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} \approx \frac{\beta(a + \Delta a, b) - \beta(a, b)}{\Delta a}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial b} \approx \frac{\beta(a, b + \Delta b) - \beta(a, b)}{\Delta b} \quad (29)$$

Z wzorów (6) i (29) otrzymujemy $\beta \in [11.491, 11.536]$.

7 Wnioski

W pracy przedstawiono podstawy teoretyczne mechaniki konstrukcji z przedziałowymi parametrami. Przedstawiono efektywne algorytmy umożliwiające optymalizację, określanie niezawodności i stateczności konstrukcji w warunkach występowania przedziałowych nieokreśloności parametrów. Należy podkreślić, że punktowe testy monotoniczności można wykorzystywać jedynie w przypadku, gdy przedział $[\mathbf{h}]$ jest dostatecznie wąski oraz odpowiednie kryteria zbieżności są spełnione. W przypadku, gdy chcemy otrzymać rozwiązanie z gwarantowaną pewnością, to należy zastosować metody przedziałowe [9, 4]. Jednak metody przedziałowe posiadają wysoką złożoność obliczeniową [3] i ograniczają się do problemów opisanych równaniem (1). Inne przykłady zastosowań zostaną przedstawione podczas prezentacji referatu.

Praca została wykonana w ramach grantu KBN Nr 8T11F00615.

Literatura

- [1] Ben-Haim Y. Elishakoff I., *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Elsevier Science Publishers, New York, 1990
- [2] Stocki R., *Optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji prętowych w zakresie dużych przemieszczeń. Teoria i program komputerowy*. Prace IPPT, Nr 13, Warszawa 1999
- [3] Neumaier A., *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge University Press, Cambridge 1990
- [4] Pownuk A., Zastosowanie regularnych przedziałowych macierzy Jacobiego do obliczania ekstremalnych wartości wielkości mechanicznych. Część I - Podstawy teoretyczne. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Budownictwo*, Nr 86, 1999, s.167-174
- [5] Kulpa Z., Pownuk A., Skalna I., Analysis of linear mechanical structures with uncertainties by means of interval methods. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 5, 1998, s.443-477
- [6] Kleiber M., *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics, Theory and Finite Element Computations*. John Willey and Sons, New York 1997
- [7] Ganzerli S., Pantelides Ch.P., Optimum structural design via convex model superposition. *Computers and Structures*, Vol. 74, 2000, s.639-647
- [8] Pantelides C.P., Booth B.C., Computer-aided design of optimal structures with uncertainty. *Computers and Structures*, Vol. 74, 2000, s.293-307
- [9] Pownuk A., Applications of Regular Interval Jacobian Matrices to Calculation Extreme Values of Mechanical Quantities. *Proc. Reliable Computations and Interval Algebra*, Bułgaria, Sozopol, 1999, s. 25-27
- [10] Jansson Ch., Rohn J., An algorithm for checking regularity of interval matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol.20, Nr 3, 1999, s.756-776
- [11] Dubois D., Prade H., Random sets and fuzzy interval analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.42, 1991, s.87-101
- [12] Pownuk A., Przedziałowe metody w rozwiązywaniu układów równań liniowych mechaniki rozmytej. *Konferencja Naukowo-Dydaktyczna Nowe Tendencje w Nauczaniu Mechaniki*, Kołobrzeg 1996, s.219-228
- [13] STRUREL, *A Structural Reliability Analysis Program System, COMREL and SYSREL Users Manual*, RCP Consult, 1998

Applications of sensitivity analysis methods for modelling of structures with interval parameters

Summary

In this paper a new method for modelling of structures with interval parameters was presented. Several point monotonicity tests were described. Using these procedures we can calculate displacements, reliability, stability and optimal solutions in the structures with the interval parameters. The point monotonicity tests can be apply only if an interval $[\mathbf{h}]$ is sufficiently narrow. If we want to obtain a solution with a guaranteed accuracy the interval monotonicity tests should be applied. Several numerical examples were also presented. All the algorithms can be implemented into the existing engineering software.