XL Sympozjon
"Modelowanie w mechanice"

NOWE FUNKCJE INKLUZYJNE W ALGORYTMIE PRZEDZIAŁOWEJ OPTYMALIZACJI GLOBALNEJ

Andrzej Pownuk
Politechnika Śląska
Wydział Budownictwa
Zakład Mechaniki Teoretycznej

Przegląd metod optymalizacji

Metody analityczne

Metoda mnożników Lagrange'a

...

Metody gradientowe

(analiza wrażliwości)

$$grad\ f(\mathrm{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

$$x_{n+1} = x_n + \lambda gradf(x_n)$$

...

Metody stochastyczne

-algorytmy genetyczne

-metody symulacyjne

...

Metody specjalne

Programowanie liniowe

Programowanie kwadratowe

Sekwencyjne programowanie liniowe

....

Niektóre ograniczenia istniejących algorytmów optymalizacji

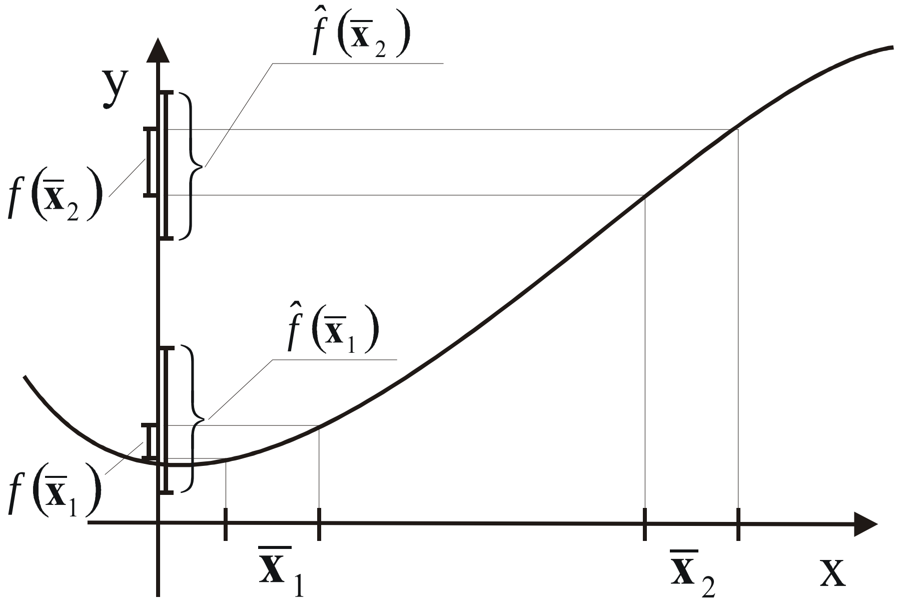
W bardziej złożonych przypadkach nie można zastosować metod analitycznych

Algorytmy lokalnej optymalizacji nie potrafią znaleźć globalnego minimum

Algorytmy stochastyczne potrafią znaleźć globalne minimum tylko z pewnym prawdopodobieństwem

Algorytmy stochastyczne wielokrotnie przeszukują te same obszary

Algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej



$$\hat{f}(\overline{\mathbf{x}}_1)^+ < \hat{f}(\overline{\mathbf{x}}_2)^-$$

z własności naturalnego przedziałowego rozszerzenia funkcji f wynika, że globalne minimum funkcji f nie może znajdować się w przedziale $\overline{\mathbf{x}}_2$.

Zalety algorytmu przedziałowej optymalizacji globalnej

1) Algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej gwarantuje, że wszystkie globalne minima funkcji celu zostaną znalezione z zadaną dokładnością.

2) Algorytm umożliwia uwzględnienie błędów zaokrągleń

3) Algorytm umożliwia znalezienie globalnego minimum funkcji nieróżniczkowalnych i nieciągłych

4) Podstawową wadą tej metody jest duża złożoność obliczeniowa.

Procedury przyspieszające zbieżność

-test monotoniczności
-test punktu środkowego
-wykorzystanie metod lokalnej optymalizacji
-test wypukłości funkcji
-przedziałowa metoda Newtona

$$\mathit{grad}\ \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$$

-wykorzystanie algorytmów przetwarzania równoległego
-wykorzystanie dobrych funkcji inkluzyjnych

Metoda hybrydowa

1) Obliczanie globalnego minimum przy wykorzystaniu dowolnej metody globalnej lub lokalnej optymalizacji.

2) Sprawdzenie czy otrzymane jest rozwiązaniem globalnym przy pomocy algorytmu przedziałowego.

Zastosowania algorytmu przedziałowej optymalizacji globalnej

Firma MacNeal-Schwendler zastosowała algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej do projektowania części rakiet.

Istnieją również zastosowania tego algorytmu w ekonomii. Firmy Swiss Bank oraz Banc One Corporation wykorzystały ten algorytm do optymalizacji matematycznych modeli ekonomicznych.

Firma Magnetic Resonance Imaging Research Center of General Electric Medical Systems oraz Genome Thereputics wykorzystały tą metodę do identyfikacji parametrów w oparciu o wyniki pomiarów.

Istnieje wiele zastosowań tego algorytmu w chemii.

Firma SUN Microsystem zastosowała algorytm przedziałowej optymalizacji globalnej do rozwiązywania układów nieliniowych równań algebraicznych oraz globalnej optymalizacji.

Oprogramowanie

GLOBOPT - Arnold Neumaier, Uniwersytet w Wiedniu.

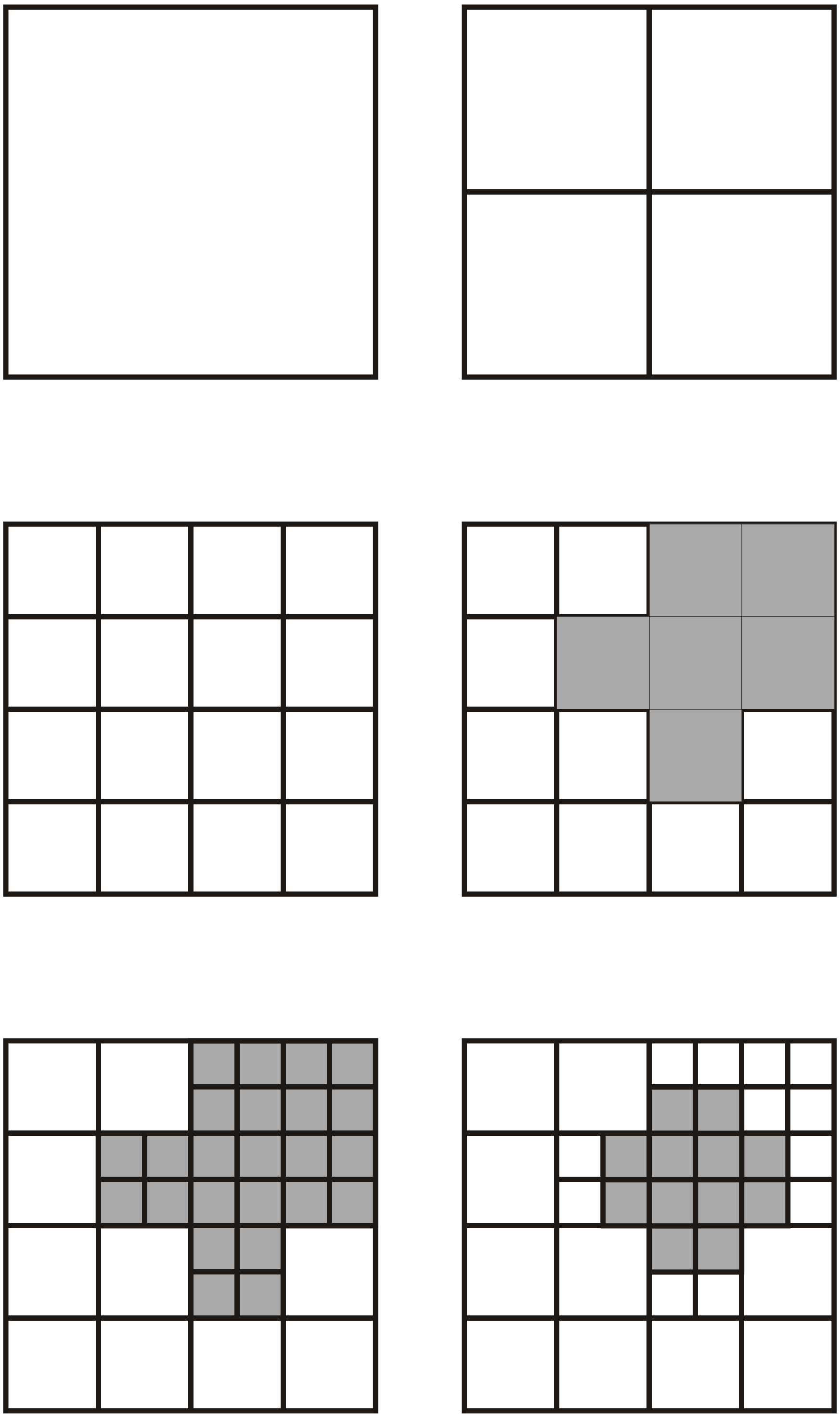
Numerica - Pascal Van Hentenryck, Laurent Michel, i Yves Deville - firma ILOG (http://www.ilog.com).

GIA (A Global Interval Arithmetic Library for Discontinuous Intervals) - Firma Delisoft Ltd. (http://www.delisoft.fi) z Finlandii napisaną w języku C++.

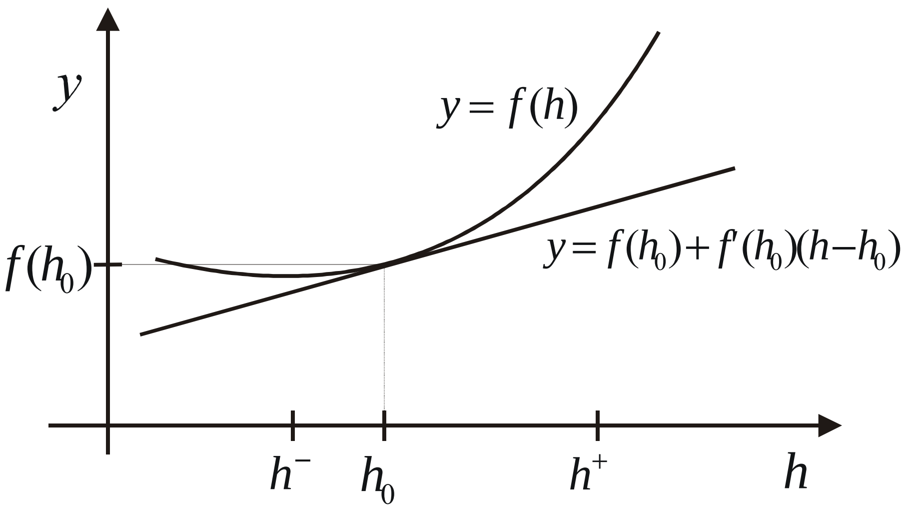
UniCalc - Russian Research Institute of Artificial Intelligence

GlobSol - Zespół należący do projektu Global Solutions, który jest sponsorowany przez SUN Mikrosystem oraz Marquette University

Algorytm

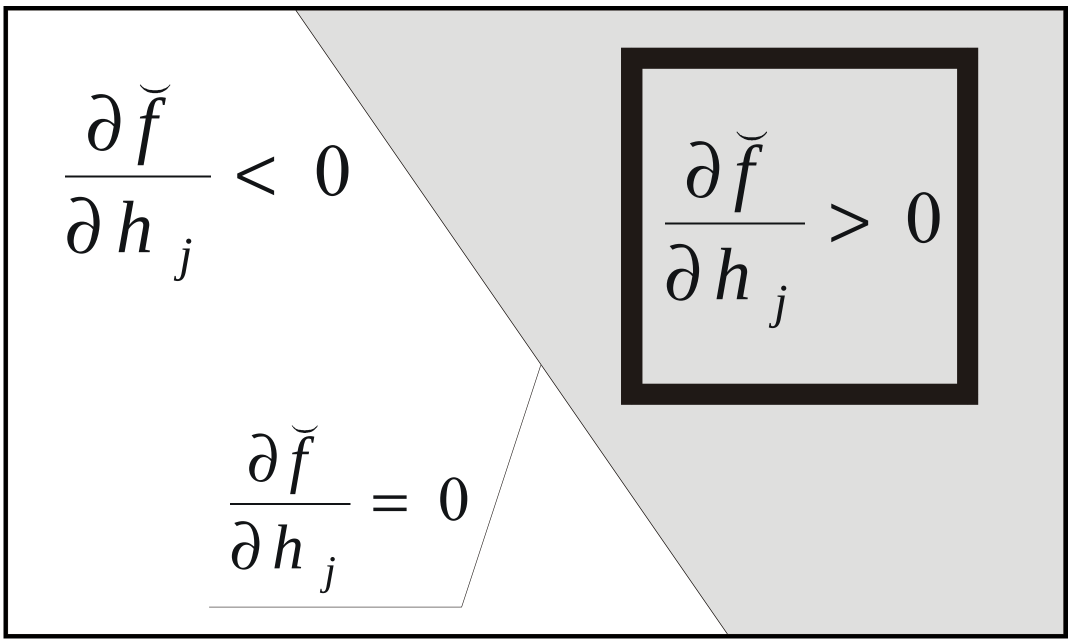


Testy monotoniczności



Pierwszy test monotonicznosci

$$\frac{\partial \bar{f}\left(h_1,\ldots,h_m\right)}{\partial h_j} \overset{df}{=} \frac{\partial f\left(h_1^0,\ldots,h_m^0\right)}{\partial h_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f\left(h_1^0,\ldots,h_m^0\right)}{\partial h_j \partial h_k}\left(h_k - h_k^0\right)$$



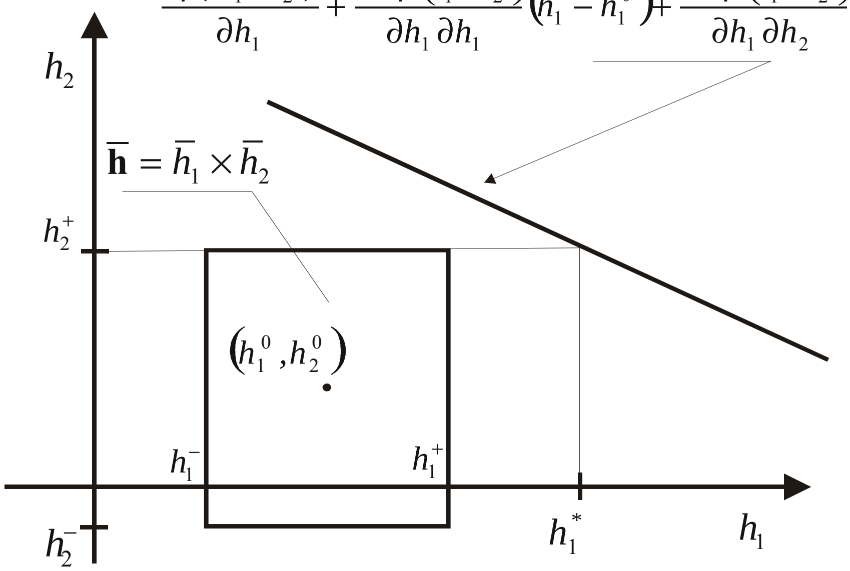
$$Ker\left(\frac{\partial \breve{f}}{\partial h_j}\right)=\left\{(h_1,\dots,h_m):\frac{\partial \breve{f}(h_1,\dots,h_m)}{\partial h_j}=0\right\}$$

$$Ker\left(\frac{\partial \breve{f}}{\partial h_j}\right)\cap \overline{\mathbf{h}}=\emptyset$$

$$sign\left(\frac{\partial \breve{f}\left(\mathbf{h}_1^w\right)}{\partial h_j}\right)=\dots=sign\left(\frac{\partial \breve{f}\left(\mathbf{h}_{2^m}^w\right)}{\partial h_j}\right)$$

Drugi test monotoniczności

$$\frac{\partial f(h_1^0,h_2^0)}{\partial h_1}+\frac{\partial^2 f\left(h_1^0,h_2^0\right)}{\partial h_1\,\partial h_1}\left(h_1-h_1^0\right)+\frac{\partial^2 f\left(h_1^0,h_2^0\right)}{\partial h_1\,\partial h_2}\left(h_2-h_2^0\right)=0$$



Trzeci test monotonicznosci

$$\frac{\partial f(h_j)}{\partial h_j} \approx \frac{\partial f(h_j^0)}{\partial h_j} + \frac{\partial^2 f(h_j^0)}{\partial h_j^2}\left(h_j - h_j^0\right) = 0$$

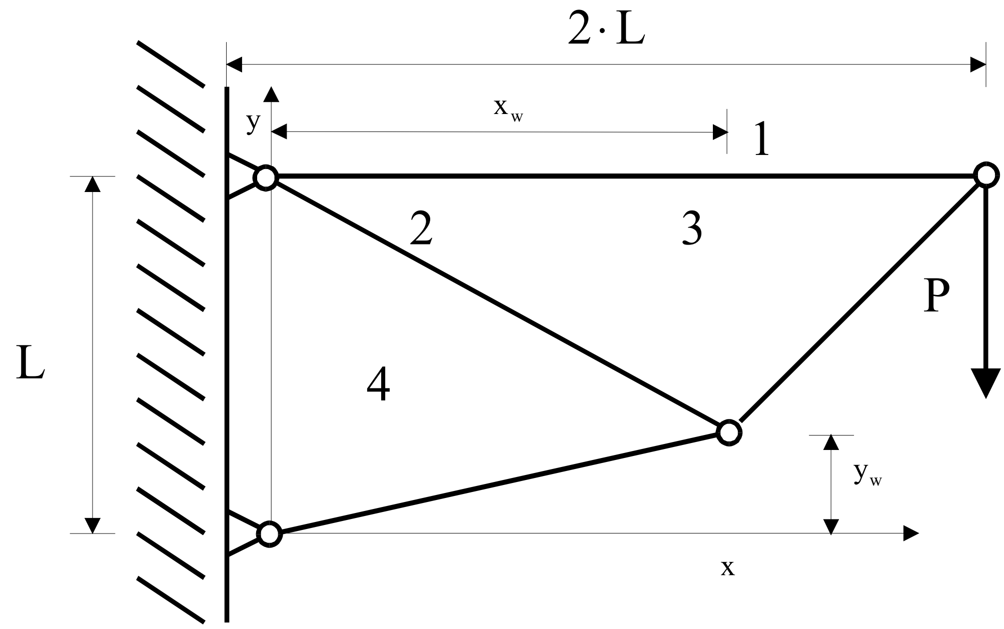
$$h_j = h_j^0 - \frac{\dfrac{\partial f(h_j^0)}{\partial h_j}}{\dfrac{\partial^2 f(h_j^0)}{\partial h_j^2}}$$

$$\frac{\partial f(h_j^0)}{\partial h_j} \approx \frac{f(h_j^0 + \Delta h_j^0) - f(h_j^0)}{\Delta h_j^0}$$

$$\frac{\partial^2 f(h_j^0)}{\partial h_j^2} \approx \frac{f(h_j^0 + \Delta h_j^0) - 2 \cdot f(h_j^0) + f(h_j^0 - \Delta h_j^0)}{\left(\Delta h_j^0\right)^2}$$

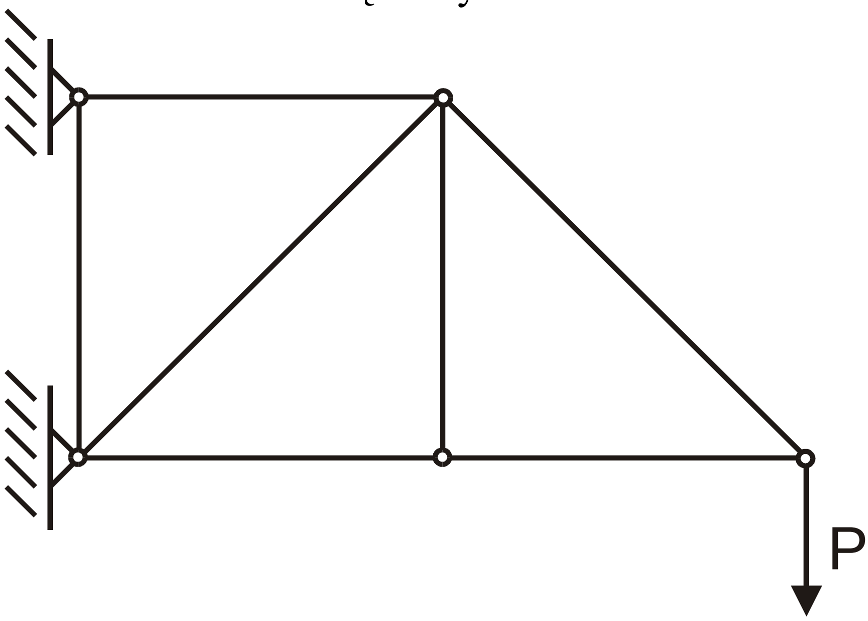
$$h_j^* \approx h_j^0 - \frac{[f(h_j^0 + \Delta h_j^0) - f(h_j^0)] \cdot \Delta h_j^0}{f(h_j^0 + \Delta h_j^0) - 2 \cdot f(h_j^0) + f(h_j^0 - \Delta h_j^0)}$$

Optymalizacja kształtu kratownicy

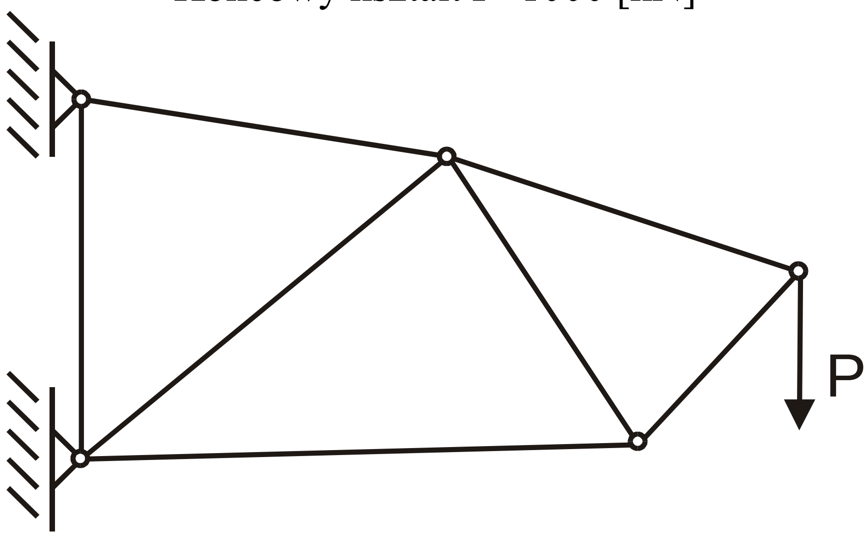


P	Rozwiązanie optymalne			
10 kN	x_w $[m]$	y_w $[m]$	$f\,[m^3]$	$minf\,[m^3]$
	1.189579	0.223488	$4.10272\cdot10^{-4}$	$4.10070\cdot10^{-4}$
	A_1 $[m^2]$	A_2 $[m^2]$	A_3 $[m^2]$	A_4 $[m^2]$
	$5.492\cdot10^{-5}$	$6.01\cdot10^{-5}$	$7.608\cdot10^{-5}$	$1.07\cdot10^{-4}$
	Przedział zawierający rozwiązanie optymalne			
	x^- $[m]$	x^+ $[m]$	y^- $[m]$	y^+ $[m]$
	1.124272	1.218754	0.183575	0.245975
	Liczba iteracji	Pozostałe przedziały	Maksymalna szerokość przedziału	
	25	15623	0.000244139	

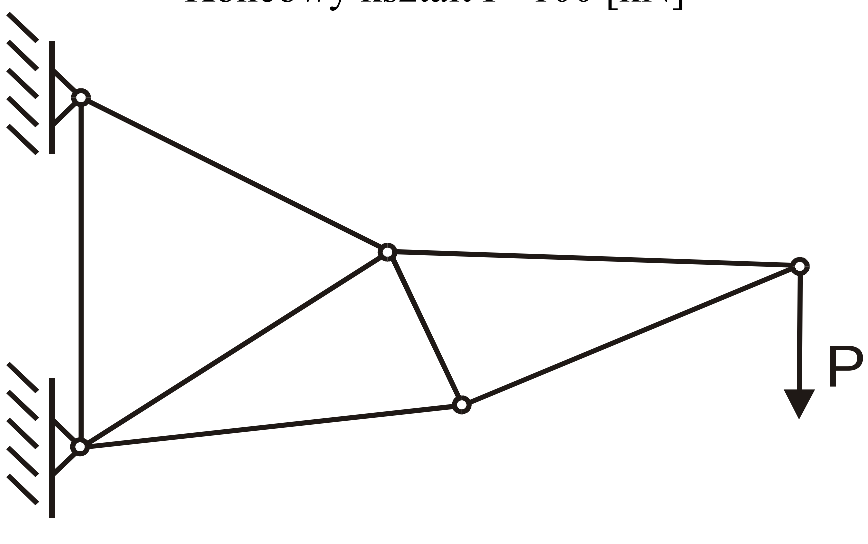
Początkowy kształt



Końcowy kształt P=1000 [kN]



Końcowy kształt P=100 [kN]



Wnioski

W pracy zaprezentowano nowy algorytm optymalizacji.

Algorytm wykorzystuje strategię „branch and bound”.

Metoda wykorzystuje testy monotoniczności oparte na wzorze Taylora.

Algorytm przeszukuje dziedzinę funkcji w systematyczny sposób dzięki czemu unika się wielokrotnego przeszukiwania tych samych obszarów (co ma miejsce w algorytmach stochastycznych).

Metoda ta posiada wysoką złożoność obliczeniową.

Złożoność obliczeniowa silnie zależy od dokładności obliczeń.