

Andrzej POWNUK

ZASTOSOWANIE REGULARNYCH PRZEDZIAŁOWYCH MACIERZY JACOBIEGO DO OBLICZANIA EKSTREMALNYCH WARTOŚCI WIELKOŚCI MECHANICZNYCH. CZĘŚĆ II - PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowania regularnych przedziałowych macierzy Jacobiego do określania ekstremalnych wartości wielkości mechanicznych. Przedziałowych algorytmów użyto do obliczania przemieszczeń konstrukcji prętowych. Teoretyczne wyniki pierwszej części pracy wykorzystano również do modelowania problemów nieliniowej teorii sprężystości.

APPLICATION OF REGULAR INTERVAL JACOBIAN MATRICES TO CALCULATION OF EXTREME VALUES OF MECHANICAL QUANTITIES. PART II - NUMERICAL EXAMPLES

Summary. In this paper, application of regular interval Jacobian matrices to calculation of extreme values of mechanical quantities was presented. Interval algorithms were used to calculate the displacement of rod structures. Theoretical results of part I of this paper were applied to modelling of problems of nonlinear theory of elasticity.

1. Wprowadzenie

Ponieważ idealny pomiar wielkości fizycznych nie istnieje istotnym zagadnieniem jest rozwijanie metod modelowania niepewności w układach mechanicznych [1, 8]. W przypadku gdy dysponujemy dużą liczbą pomiarów stosujemy metody probabilistyczne [8]. Jednak gdy ilość pomiarów jest mała, do modelowania nieokreśloności można wykorzystać zbiory liczbowe (tolerancje) [1,3,5,7].

Ekstremalne wartości wielkości mechanicznych można obliczyć następująco:

$$\underline{z}_i = \begin{cases} \min z_i \\ F(z,t) = 0, \\ t \in \mathbf{T} \end{cases}, \bar{z}_i = \begin{cases} \max z_i \\ F(z,t) = 0, \\ t \in \mathbf{T} \end{cases}, i=1,\dots,n \quad (1)$$

W pracy przedstawiono przykłady zastosowań przedziałowych metod obliczania ekstremalnych wartości $\underline{z}_i, \bar{z}_i$, które zostały opisane w pierwszej części I artykułu [6].

2. Modelowanie przedziałowych nieokreśloności przy użyciu komputerowych metod mechaniki ciała stałego

Współczesne metody komputerowe (MES, MEB, MRS itp. [4]) sprowadzają problemy brzegowe mechaniki ciała stałego do problemu rozwiązania układu równań algebraicznych o jednej z następujących postaci

$$Kq = Q(t) \quad (2)$$

$$K(t)q = Q \quad (3)$$

$$K(t)q = Q(t) \quad (4)$$

gdzie $t \in \mathbf{T} \subset R^m$ oznacza wektor niepewnych parametrów układu mechanicznego. Uwikłane funkcje $q_i(t)$ będą monotoniczne gdy następujące macierze

$$K, \left[K^i - \frac{\partial Q(\mathbf{T})}{\partial t_j} \right] \text{ dla } i=1, \dots, n \text{ j}=1, \dots, m \quad (5)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{T}), \left[\mathbf{K}^i(\mathbf{T}) \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{T})}{\partial t_j} \mathbf{q}(\mathbf{T}) \right] \text{ dla } i=1, \dots, n \text{ j}=1, \dots, m \quad (6)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{T}), \left[\mathbf{K}^i(\mathbf{T}) \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{T})}{\partial t_j} \mathbf{q}(\mathbf{T}) - \frac{\partial Q(\mathbf{T})}{\partial t_j} \right] \text{ dla } i=1, \dots, n \text{ j}=1, \dots, m \quad (7)$$

będą regularne. Macierze \mathbf{K}^i powstają z macierzy \mathbf{K} poprzez skreślenie i -tej kolumny oraz $\mathbf{q}(\mathbf{T})$ jest przedziałowym rozszerzeniem rozwiązania odpowiedniego układu równań (5, 6 lub 7). Przedziałowe rozszerzenie $\mathbf{q}(\mathbf{T})$ możemy obliczyć jako rozwiązanie odpowiedniego przedziałowego układu równań liniowych $Kq = Q(\mathbf{T})$, $\mathbf{K}(\mathbf{T})q = Q$ lub $\mathbf{K}(\mathbf{T})q = Q(\mathbf{T})$. Jeśli znamy rozwiązanie równania

$$K(t^*) \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial Q(t^*)}{\partial t} - \frac{\partial K(t^*)}{\partial t} q(t^*) \quad (8)$$

dla dowolnego punktu $t^* \in \mathbf{T} \subset R^m$, to po przyjęciu następujących oznaczeń

$$t_i^{\text{sgn}(\alpha)} = t_i, \text{ gdy } \text{sgn}(\alpha) = -1, \quad t_i^{\text{sgn}(\alpha)} = \bar{t}_i, \text{ gdy } \text{sgn}(\alpha) = +1 \quad (9)$$

możemy otrzymać potencjalnie dokładne rozwiązanie $\mathbf{q}(\mathbf{T}) = \times_{i=1}^n [\underline{q}_i, \bar{q}_i]$ gdzie

$$\underline{q}_i = q_i \left(t_1^{-\text{sgn}\left(\frac{\partial q_i}{\partial t_1}\right)}, \dots, t_m^{-\text{sgn}\left(\frac{\partial q_i}{\partial t_m}\right)} \right), \quad \bar{q}_i = q_i \left(t_1^{\text{sgn}\left(\frac{\partial q_i}{\partial t_1}\right)}, \dots, t_m^{\text{sgn}\left(\frac{\partial q_i}{\partial t_m}\right)} \right) \quad (10)$$

w skrócie będziemy pisać:

$$\underline{q}_i = q_i \left(t^{-\text{sgn}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)} \right), \quad \bar{q}_i = q_i \left(t^{\text{sgn}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)} \right) \quad (11)$$

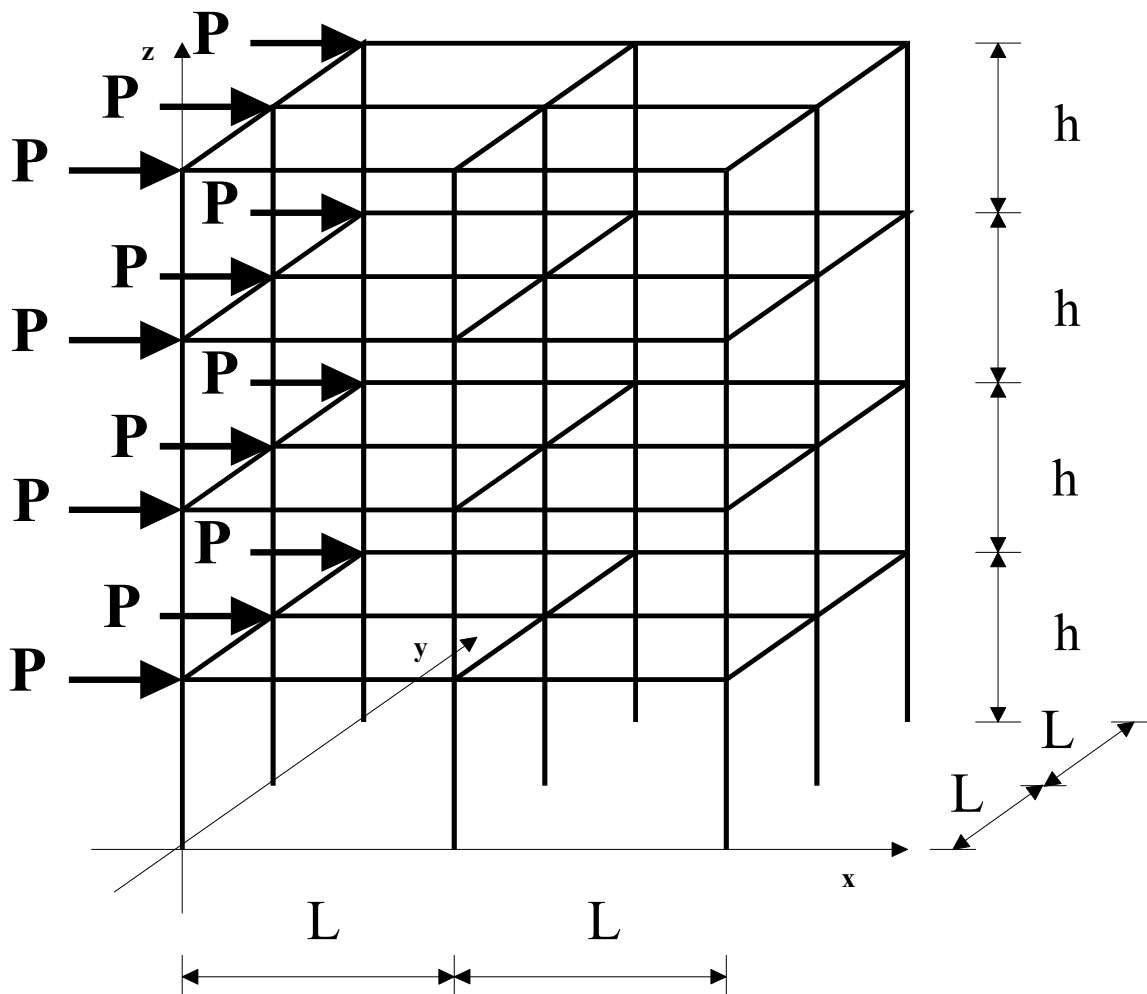
Rozwiązanie to będzie dokładne jeśli regularne są odpowiednie interwałowe macierze (5-7).

Jeżeli ograniczymy się do liniowych zagadnień statyki analizowanych przy pomocy MES, to odpowiednio do równań (2-4) możemy wyróżnić następujące przypadki szczególne.

- a) Układ równań (2) otrzymujemy w przypadku gdy nieokreślone jest tylko obciążenie Q .
- b) Układ równań (3) otrzymujemy gdy nieokreślone są stałe materiałowe (macierz C , $\sigma = C \varepsilon$) i charakterystyki geometryczne układu (macierz B , $\varepsilon = Bq$).
- c) Układ równań (4) powstaje gdy nieokreślone są zarówno charakterystyki geometryczne(B), stałe materiałowe (C) jak i obciążenie zewnętrzne Q .

4. Modelowanie przedziałowych nieokreśloności w konstrukcjach prętowych

Rozważmy układ prętowy przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Trójwymiarowa rama – problem przykładowy

Fig. 1. 3D frame – a model problem

Wyróżnimy cztery przypadki:

a) Nieokreślonymi parametrami będą tylko obciążenia¹.

$$t_i = P_i \text{ (obciążenia skupione) lub } t_j = q_j \text{ (obciążenia ciągłe)} \quad (12)$$

b) Nieokreślonymi parametrami będą obciążenia, charakterystyki materiałowe oraz A i J .

$$t_i = P_i, t_j = q_j, t_i = E_i, t_i = A_i, t_i = J_i \quad (13)$$

c) Nieokreślonymi parametrami będą stałe materiałowe oraz charakterystyki geometryczne.

$$t_i = E_i, t_i = L_i, t_i = A_i, t_i = J_i \quad (14)$$

d) Nieokreślonymi parametrami będą wszystkie parametry układu mechanicznego.

W przypadku (a) macierze (5) są punktowe. Co znacznie ułatwia obliczenia. Do macierzy o postaci (5) prowadzą układy prętowe, w których oprócz sił nieokreślone są również stałe materiałowe oraz parametry A i J (stałe materiałowe oraz parametry A i J można przenieść do wektora prawej strony). W przypadku (c) lub (d) należy sprawdzić regularność, odpowiednio macierzy (6) lub (7). W obliczeniach przyjmujemy następujące dane liczbowe: $E = 2.0 \cdot 10^5$ [MPa], $G = 8.5 \cdot 10^{10}$ [MPa], $J_y = J_z = \frac{0.05^4}{12}$ [m⁴], $J_0 = 0.14 \cdot 0.05^4$ [m⁴], $A = 0.05^2$ [m²], $L = h = 3$ [m], $\mathbf{P} = [1, 2]$ [kN]. Wyniki obliczeń przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1

| | | | | | | |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| np | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| nw | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| ne | 42 | 63 | 160 | 260 | 325 | 390 |
| nn | 27 | 36 | 80 | 125 | 150 | 175 |
| dim | 108 | 162 | 384 | 600 | 750 | 900 |
| (x,y,z) | (0,0,6) | (0,0,9) | (0,0,12) | (0,0,12) | (0,0,15) | (0,0,18) |
| $\max \underline{q}_i$ | 0.039626 | 0.088654 | 0.110452 | 0.085405 | 0.132182 | 0.189022 |
| $\max \bar{q}_i$ | 0.079251 | 0.177307 | 0.220905 | 0.170810 | 0.264365 | 0.378043 |

Gdzie np jest liczbą pięter w ramie z rys. 1, nw jest liczbą prętów o długości L w jednym boku podstawy ramy przedstawionej na rysunku 1, ne jest liczbą prętów, nn jest liczbą węzłów, dim jest liczbą stopni swobody układu, (x,y,z) to współrzędne punktu, w którym występują maksymalne przemieszczenia $\max \mathbf{q}_i \in IR$. Nieokreślone są siły \mathbf{P} , macierze (5) są punktowe.

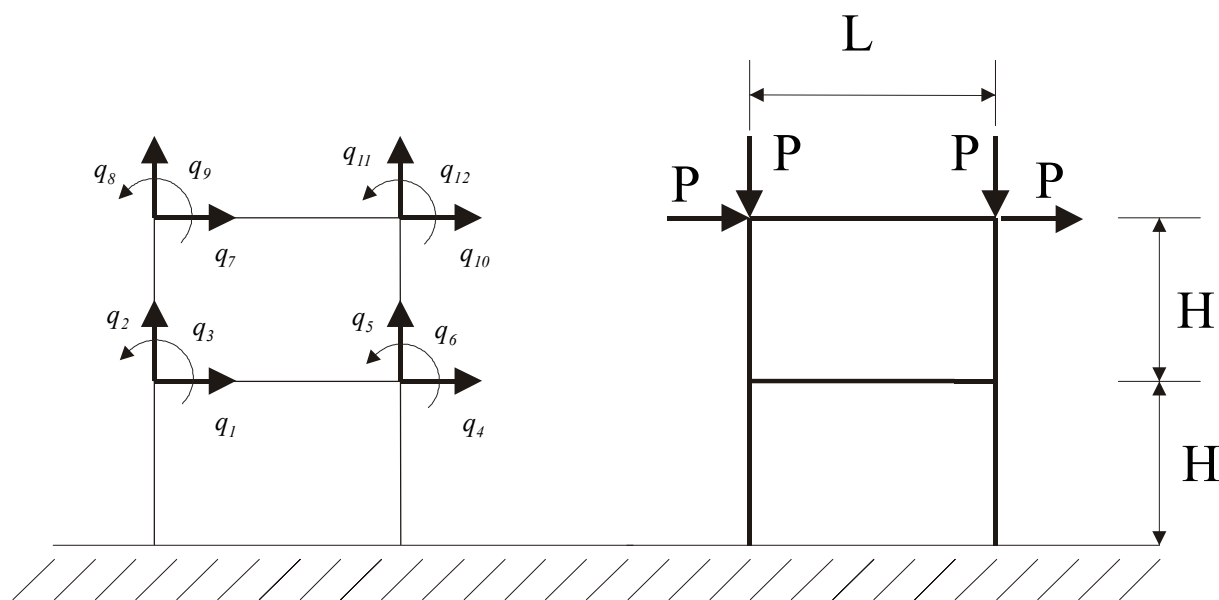
¹ W przypadku gdy nieokreślone są tylko siły, to przemieszczenia są liniową funkcją obciążenia $q = K^{-1}Q$. Ekstremalne wartości funkcji liniowej określonej na wielowymiarowym przedziale zawsze znajdują się w wierzchołkach przedziału określoności.

Ekstremalne wartości przemieszczeń określamy na podstawie wrażliwości wektora przemieszczeń (na podstawie wzoru (11)):

$$K \frac{\partial q}{\partial P_i} = \frac{\partial Q}{\partial P_i} \quad i=1, \dots, n_p \quad (15)$$

gdzie n_p jest liczbą sił działających na układ.

Rozważmy konstrukcję prętową przedstawioną na rysunku 2.



Rys. 2. Dwuwymiarowa rama - przykład

Fig. 2. 2D frame – a model problem

W obliczeniach przyjmujemy $E \in [2.1 \cdot 10^5, 2.2 \cdot 10^5]$ [MPa], $J \in \left[\frac{0.05^4}{12}, \frac{0.055^4}{12} \right]$ [m⁴],

$A \in [0.05^2, 0.055^2]$ [m²], $L = H = 1$ [m], $P = 1$ [kN]. Wyniki obliczeń przedstawione są w tabeli 2.

Tabela 2

| | q_1 | q_2 | q_3 | q_4 | q_5 | q_6 |
|-------------------|----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| \underline{q}_i | 0.035716 | 0.000008 | -0.011230 | 0.035716 | -0.000021 | -0.011230 |
| \bar{q}_i | 0.037414 | 0.000009 | -0.010718 | 0.037414 | -0.000017 | -0.010718 |
| | q_7 | q_8 | q_9 | q_{10} | q_{11} | q_{12} |
| \underline{q}_i | 0.082163 | 0.000009 | -0.007494 | 0.082163 | -0.000033 | -0.007494 |
| \bar{q}_i | 0.086067 | 0.000010 | -0.007151 | 0.086067 | -0.000026 | -0.007151 |

3. Analiza przedziałowych nieokreśloności w problemach nieliniowej teorii sprężystości

W zagadnieniach nieliniowej teorii sprężystości obliczenia przeprowadzamy w oparciu o metody iteracyjne [4]. Rozważania ograniczymy do obciążeń jednoparametrowych tzn.

$$Q = Q(\tau) \in \mathbf{Q}(\tau) \in IR^n \quad (16)$$

gdzie $Q : R \rightarrow IR^n$ jest obciążeniem określonym z dokładnością do przedziału liczbowego oraz $\tau \in [0, 1]$. Po zastosowaniu MES statyczne zagadnienia nieliniowej teorii sprężystości można sformułować w następującej postaci [4]:

$$K(q(\tau, t), t) \cdot \dot{q}(\tau, t) = \dot{Q}(\tau, t) \quad (17)$$

Rozwiązanie można przedstawić w postaci parametrycznej $q = q(\tau, t) = q^\tau(t)$ gdzie $\tau \in [0, 1]$, $t \in \mathbf{T}$. Analiza przyrostowa polega na dyskretnym procesie kontynuacji procesu obliczeń. Kolejne przyrosty przemieszczeń obliczamy zgodnie z następującymi wzorami [4]:

$$K_{ef}^{\tau+\Delta\tau} \Delta q^\tau = \Delta Q_{ef}^{\tau+\Delta\tau} \quad (18)$$

$$q^{\tau+\Delta\tau}(t) = q^\tau(t) + \Delta q^\tau(t) \quad (19)$$

gdzie $K_{ef}^{\tau+\Delta\tau}$ jest efektywną macierzą sztywności oraz $\Delta Q_{ef}^{\tau+\Delta\tau}$ jest efektywnym wektorem obciążenia. Powyższy algorytm można uogólnić na przypadek interwałowych obciążeń.

Założymy teraz, że znamy przedział $\mathbf{q}_h(\tau) = \text{hull}\{q_h(\tau, t) : t \in \mathbf{T}\}$ gdzie q_h oznacza rozwiązanie otrzymane przy pomocy metody przybliżonej (18). Przyrost przemieszczeń będący rozwiązaniem równania (18) jest funkcją przemieszczeń poprzedniej iteracji $q^\tau \in \mathbf{q}^\tau$, nieokreślonych parametrów t oraz wektora obciążenia $\Delta Q \in \Delta \mathbf{Q}$

$$\Delta q^\tau = \Delta q^\tau(t, q^\tau, \Delta Q) \in \{\Delta q^\tau(t, q^\tau, \Delta Q) : t \in \mathbf{T}, q^\tau \in \mathbf{q}^\tau, \Delta Q \in \Delta \mathbf{Q}\} \quad (20)$$

$$\Delta \mathbf{q}^\tau \in \Delta \mathbf{q}^\tau = \text{hull}\{\Delta q^\tau : t \in \mathbf{T}, q^\tau \in \mathbf{q}^\tau, \Delta Q \in \Delta \mathbf{Q}\} \quad (21)$$

Przy pomocy procedur opisanych w pierwszej części pracy można pokazać kiedy Δq^τ zależy monotonicznie od parametrów $t, q, \Delta Q$. Gdy własność monotoniczności zostanie wykazana, to końce przedziału $\Delta \mathbf{q}^\tau$ można obliczyć na podstawie końców przedziałów $\mathbf{T}, \mathbf{q}, \Delta \mathbf{Q}$ czyli:

$$\Delta \mathbf{q}^\tau = \Delta \mathbf{q}^\tau(\underline{t}, \bar{t}, \underline{q}^\tau, \bar{q}^\tau, \underline{\Delta Q}, \bar{\Delta Q}) \quad (22)$$

Na podstawie przyrostu (22) można obliczyć przedział, który zawiera przemieszczenie $q^{\tau+\Delta\tau}$.

$$\mathbf{q}^{\tau+\Delta\tau} = \mathbf{q}^\tau + \Delta \mathbf{q}^\tau \quad (23)$$

Szukamy ekstremalnego przemieszczenia $\bar{q}_{i_0} = \sup\{q_{i_0}(t) : t \in \mathbf{T}\}$. Jeśli w oparciu o twierdzenie 1 z pierwszej części pracy stwierdzimy, że pochodna $\frac{\partial q_{i_0}(t^*)}{\partial t_j}$ ma stały znak, to w

dalszych obliczeniach przedział \mathbf{T} możemy zastąpić m-1 wymiarowym przedziałem

$$\mathbf{T}^j = [\underline{t}_1, \bar{t}_1] \times \dots \times [\underline{t}_{j-1}, \bar{t}_{j-1}] \times t_j^{\alpha_j^{i_0}} \times [\underline{t}_{j+1}, \bar{t}_{j+1}] \times \dots \times [\underline{t}_m, \bar{t}_m] \quad (24)$$

Podczas dalszych obliczeń powstają przedziały o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{j_1, \dots, j_k} = & [\underline{t}_1, \bar{t}_1] \times \dots \times [\underline{t}_{j_1-1}, \bar{t}_{j_1-1}] \times t_{j_1}^{\alpha_{j_1}^{i_0}} \times [\underline{t}_{j_1+1}, \bar{t}_{j_1+1}] \times \dots \times \\ & \times [\underline{t}_{j_2-1}, \bar{t}_{j_2-1}] \times t_{j_2}^{\alpha_{j_2}^{i_0}} \times [\underline{t}_{j_2+1}, \bar{t}_{j_2+1}] \times \dots \times [\underline{t}_{j_k-1}, \bar{t}_{j_k-1}] \times t_{j_k}^{\alpha_{j_k}^{i_0}} \times [\underline{t}_{j_k+1}, \bar{t}_{j_k+1}] \times \dots \times [\underline{t}_m, \bar{t}_m] \end{aligned} \quad (25)$$

Zwykle funkcja $q_{i_0}(t)$ jest monotoniczna względem wszystkich swoich zmiennych. Przedział

\mathbf{T} zostaje zredukowany do punktu $\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{T}^{j_1, \dots, j_k} \Rightarrow t^{j_1, \dots, j_k} = (t_1^{\alpha_1^{i_0}}, \dots, t_m^{\alpha_m^{i_0}}) \in R^m$. Maksymalne przemieszczenie $q_{i_0}^+$ można wtedy obliczyć jako:

$$\bar{q}_{i_0} = \sup\{q_{i_0}(t) : t \in \mathbf{T}\} = q_{i_0}(t_1^{\alpha_1^{i_0}}, \dots, t_m^{\alpha_m^{i_0}}) \quad (26)$$

W przypadku gdy nie wszystkie pochodne mają stałe znaki, przedział \mathbf{T} może zostać zredukowany jedynie do $\mathbf{T}^{j_1, \dots, j_k}$ (gdzie $k \leq m$), to można podzielić przedział \mathbf{T} na sumę podprzedziałów $\mathbf{T}_i^{j_1, \dots, j_k}$ tak, że $\mathbf{T}^{j_1, \dots, j_k} = \bigcup_i \mathbf{T}_i^{j_1, \dots, j_k}$ oraz $\text{int}(\mathbf{T}_{i_1}^{j_1, \dots, j_k}) \cap \text{int}(\mathbf{T}_{i_2}^{j_1, \dots, j_k}) = \emptyset$ dla $i_1 \neq i_2$. Jeśli rozwiązanie jest monotoniczne we wszystkich podprzedziałach, $\mathbf{T}_i^{j_1, \dots, j_k}$ to jest monotoniczne w całym przedziale \mathbf{T} . Dokładność metody zwiększa się wraz ze wzrostem liczby podprzedziałów.

4. Wnioski

W pracy przedstawiono zastosowania regularnych przedziałowych macierzy Jacobiego do modelowania niepewności parametrów układów mechanicznych. W oparciu o teoretyczne wyniki pierwszej części pracy obliczono ekstremalne wartości przemieszczeń w przykładowych konstrukcji. Ze względu na algorytm obliczeń wyróżniono trzy typy układów mechanicznych z niepewnymi parametrami. Do badania regularności macierzy sztywności można zastosować przedziałową metodą eliminacji Gaussa. Jeśli po przeprowadzeniu eliminacji na głównej przekątnej nie ma przedziałów zawierających elementy zerowe, to macierz jest regularna. Przykłady numeryczne pokazują, że przedstawiony algorytm umożliwia analizowanie przedziałowych nieokreśloności dla liniowych problemów o kilkuset stopniach swobody.

LITERATURA

- [1] Ben-Haim Y., Elishakoff I., *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Elsevier Science Publishers, New York, 1990
- [2] Branicki Cz., Ciesielski R., Kacprzyk Z., Kawecki J., Kączkowski Z., Rakowski G, *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe. Tom 1*. Arkady, Warszawa, 1991
- [3] Elishakoff I., *Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A.M.Freudenthal's criticisms to modern convex modelling*, *Computers and Structures*, Vol.56, No.6, 1995, s.871-895
- [4] Kleiber M. (ed.), *Mechanika techniczna tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. PWN, Warszawa, 1995
- [5] Pantelides P., Ganzerli S., *Design of Trusses under Uncertain Loads using Convex Models*. *Journal of Structural Engineering*, Vol.124, No.3, 1998, s.318-329
- [6] Pownuk A. *Zastosowanie regularnych przedziałowych macierzy Jacobiego do obliczania ekstremalnych wartości wielkości mechanicznych. Część I - podstawy teoretyczne. (praca opublikowana w niniejszym zeszycie naukowym)*
- [7] Pownuk A., *Modelowanie niepewnych parametrów układów mechanicznych metodami matematyki przedziałowej*. XXXVIII Sympozjon „Modelowanie w mechanice”, Wisła, 1999
- [8] Rao S.S., *Reliability Based Design*. McGraw-Hill, New York, 1992

Abstract

In this paper, applications of regular interval Jacobian matrix are presented. Theoretical back-ground of this method was published in the first part of this paper. Extreme values of displacements in uncertain frame structures are calculated using described interval method. Numerical results show that these interval methods are very effective and efficient methods for modelling interval uncertainty of parameters. Algorithm of calculation of extreme values of mechanical quantity in nonlinear problems of elasticity is also presented.